UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ATTUARIALI E FINANZIARIE

DOTTORATO DI RICERCA IN SCIENZE ATTUARIALI - XVIII CICLO

TESI DI DOTTORATO

Su un modello integrato di *alm* per la politica ottima d'investimento di un Fondo Pensione

Coordinatore

Prof. Fabio Grasso

Candidato

Emanuela Pasqualitto

ROMA 20 MARZO 2006

SU UN MODELLO INTEGRATO DI *ALM* PER LA POLITICA OTTIMA D'INVESTIMENTO DI UN FONDO PENSIONE

Emanuela Pasqualitto*

SINTESI

Obiettivo di questa tesi è individuare una politica ottima d'investimento delle attività di un Fondo Pensione che combini in modo integrato le esigenze del Fondo di porre in essere modelli di gestione che generino un perfetto matching tra le proprie attività e passività quali le strategie di immunizzazione stocastica e l'esigenza altrettanto importante di tener conto delle preferenze degli aderenti al Fondo stesso in termini di rischio-rendimento esprimibili attraverso le loro funzioni di utilità.

CAPITOLO I

L'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA

1. INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELL'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA

Una politica di *asset allocation* ottimale per un Fondo Pensione dovrebbe conciliare le esigenze di tutti coloro che sono interessati a tale processo, il Fondo Pensione in primo luogo e gli aderenti che lo compongono. Tale politica è ottima quando riesce a soddisfare entrambi. In genere il Fondo tende a ricorrere a modelli di immunizzazione stocastica che si fondano sull'utilizzo della *duration* quale indicatore strategico al fine di definire il *matching* tra l'attivo ed il passivo. Tuttavia bisogna affermare che, anche se tale strategia risulta essere soddisfacente per il Fondo, non è detto che lo sia altrettanto per gli aderenti in quanto nessun riferimento è fatto alla distribuzione del benessere che da tale allocazione deriva ai membri del Fondo stesso. Ecco perché quello che ci proponiamo di fare è

* Dottorato di Ricerca in Scienze Attuariali, Dipartimento di Scienze Attuariali e Finanziarie, Università "La Sapienza", Roma. E-mail: emanuela.pasqualitto@uniroma1.it.

individuare un modello di *asset liability management* (*alm)* integrato che contemperi le esigenze di entrambi.
Procediamo innanzi tutto a descrivere le ipotesi di base che adotteremo nel corso del lavoro. Si farà riferimento ad un mercato in cui:

- non ci sono né costi di transazione, né di tassazione;
- i titoli sono infinitamente divisibili;
- non ci sono limiti alle quantità contrattate, né alle vendite allo scoperto;
- gli operatori sono massimizzatori del profitto;
- non ci sono possibilità di arbitraggi non rischiosi.

In condizioni di incertezza, ipotizzando che l'unica variabile aleatoria del modello sia rappresentato dal tasso a pronti *i(t),* gli operatori economici non riescono a definire il valore dei contratti esistenti sul mercato stesso; più in dettaglio, ciò che generalmente si assume è che gli agenti economici abbiano delle opinioni conformi sulle caratteristiche seguite dal processo del tasso locale *i(t).* A tal proposito, si assume che:

- il processo del tasso locale *i(t)* è un processo di Markov, per cui i valori futuri assunti dallo stesso dipendono esclusivamente dal valore corrente del processo e non dalla sua intera storia;
- il processo di Markov è a traiettorie continue ovvero è un processo di diffusione. In termini finanziari ciò equivale ad affermare che il mercato dei titoli, pur seguendo una dinamica di tipo stocastico, di fatto, non subisca shock.

Sulla base di tali premesse, il processo $\{(i(t))\}$ può essere descritto da una dinamica del tipo:

$$di(t) = f((i(t),t))\,dt + g(i(t),t)\,dZ(t), \qquad [1]$$

dove $f(i(t), t)$ è il drift del processo, $g(i(t), t)$ il coefficiente di diffusione e $Z(t)$ processo di Wiener.

Siccome l'unica fonte d'incertezza dell'intero modello è rappresentata dal livello del tasso corrente $i(t)$, anche il prezzo all'istante t di qualsiasi titolo che si ha sul mercato è influenzato da $i(t)$. Con riferimento ad esempio ad uno zero coupon bond che abbia scadenza s, all'epoca t di valutazione il suo valore sarà dato dalla:

$$v(t, s)=v(i(t), t, s). \qquad [2]$$

Ipotizziamo ora che $v(.)$ sia una funzione monotona di i, che abbia derivate parziali v_t, v_i , v_{ii} continue. Di conseguenza anche la dinamica di $v(.)$ sarà descritta da un'equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dv(i(t),t,s) = v(i(t),t,s)\mu((i(t),t,s)dt + v(i(t),t,s)\sigma(i(t),t,s)dZ(t) \text{ , } [3]$$

con:

$\mu((i(t),t,s) =$ media del tasso di rendimento relativo ad un intervallo infinitesimo di tempo, di uno zero coupon bond con scadenza in s;

$\sigma(i(t),t,s) =$ varianza del tasso di rendimento relativo ad un intervallo infinitesimo di tempo, di uno zero coupon bond con scadenza in s.

Più in particolare, i coefficienti $\mu((i(t),t,s)$ e $\sigma(i(t),t,s)$ possono essere espressi in funzione dei parametri f e g del processo $i(t)$. Sarà pertanto:

$$\mu(i(t),t,s) = \frac{1}{v(i(t),t,s)}\left[f(i(t),t)\frac{\partial}{\partial i} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}g^2(i(t),t)\frac{\partial^2}{\partial i^2}\right]v(i(t),t,s) \qquad [4]$$

e

$$\sigma(i(t),t,s) = -\frac{1}{v(i(t),t,s)}g(i(t),t)\frac{\partial}{\partial i}v(i(t),t,s) \qquad [5]$$

1.1 IL VALORE ATTUALE DI UN FLUSSO D'IMPORTI E LA MISURA DI *DURATION* STOCASTICA

Supponiamo di avere un flusso d'importi del tipo $a_1, a_2, \ldots\ldots\ a_m$, disponibili alle epoche $t_1, t_2, \ldots\ldots\ t_m$. Il valore attuale di tale flusso d'importi, che definiremo *a,* in ipotesi di struttura per scadenza deterministica ad un'epoca di valutazione $t<t_1$ sarà:

$$W(t,a) = \sum_{k=1}^{m} a_k v(t,t_k) \quad . \qquad [6]$$

In condizioni di incertezza sulla dinamica dei tassi d'interesse, il valore attuale del flusso *a* risulta essere influenzato dal livello del tasso locale osservato in *t,* cioè:

$$W(t,a) = W(i(t),t,a) \quad . \qquad [7]$$

In altri termini, la dinamica del valore attuale di *a* sarà direttamente determinata dalla dinamica di *v*. Per la [3] risulterà:

$$dW(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k dv(t,t_k) = \left[\sum_{k=1}^{m} a_k v(t,t_k) \mu(t,t_k) \right] dt + \\ - \left[\sum_{k=1}^{m} a_k v(t,t_k) \sigma(t,t_k) \right] dZ(t) \qquad [8]$$

ovvero:

$$dW = W \mu_W\, dt - W \sigma_W\, dZ(t) \,, \qquad [9]$$

in cui:

$$\mu_W(i(t),t,a)=\frac{1}{W(i(t),t,a)}\left[f\frac{\partial}{\partial i}+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}g^2\frac{\partial^2}{\partial i^2}\right]^2 W(i(t),t,a) \qquad [10]$$

e

$$\sigma_W(i(t),t,a)=-\frac{1}{W(i(t),t,a)}g\frac{\partial}{\partial i}W(i(t),t,a) \quad . \qquad [11]$$

Dalla [11] risulta che le variazioni percentuali del valore attuale di un flusso d'importi *a, dW/W,* attribuibili a fluttuazioni del tasso locale *i(t)* dipendono esclusivamente dalla quantità $-gW_i/W$.

Essendo poi il fattore *g* dipendente esclusivamente da *i(t)* e da *t* e non anche da *a* si deduce che le caratteristiche dei flussi $a_1, a_2, \ldots\ldots a_m$ influiscono sul valore attuale del flusso *a* tramite la quantità:

$$\Omega(i(t),t,a)=-\frac{W_i(i(t),t,a)}{W(i(t),t,a)}. \qquad [12]$$

La [12] si definisce misura del rischio base di *a*. Essa è la derivata logaritmica della funzione valore attuale rispetto al tasso d'interesse, e, come tale, assume l'usuale significato di elasticità intesa come la sensibilità della funzione valore attuale rispetto alle variazioni aleatorie della struttura dei tassi d'interesse.

Sulla scorta poi di quanto stabilito da Cox, Ingersoll e Ross[1], definiamo la *duration* stocastica del flusso *a* l'espressione:

[1] Si veda in proposito Cox, Ingersoll e Ross, 1979, *"Duration and the Measurement of Basis Risk"* Journal of Business, 52(1), pp. 51-61.

$$D(t,a) = \varphi^{-1}\left[\frac{\sum_{k=1}^{m}\varphi(t,t_k)a_k v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m}a_k v(t,t_k)}\right] - t, \qquad [13]$$

in cui $\varphi^{-1}(.)$ è la funzione inversa di $\varphi(i(t),t,s)$ rispetto alla variabile *s*, la quale indica la rischiosità, in *t*, di uno zero coupon bond con scadenza in *s,* purché questa risulti, rispetto a *s*, continua e strettamente monotona. La *duration* stocastica assume dunque il significato di "media associativa dei tempi di scadenza del flusso di cassa, fatta tramite la trasformazione φ, con pesi pari ai valori attuali dei singoli pagamenti"[2].

1.2 IL TEOREMA DELL'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA

Supponiamo di considerare un portafoglio composto da due flussi, il flusso *a* attivo e il flusso *b* passivo, composti tutti da elementi non negativi rispetto allo stesso scadenzario.

Si può dire che, con riferimento ad una struttura per scadenza di tipo stocastica, i due flussi siano immunizzati se all'epoca *t* di valutazione soddisfano alle due condizioni[3]:

$$dW(i(t),t,a) = dW(i(t),t,b); \qquad [14]$$

$$D(i(t),t,a) = D(i(t),t,b). \qquad [15]$$

La [14], detta vincolo di bilancio, impone che all'epoca *t* risulti nullo il differenziale stocastico del valore netto di portafoglio:

---

[2] Si veda in proposito De Felice, Moriconi, 1991, *La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Modelli e Strategie*, Ed. Il Mulino, pag. 218.

[3] Per una dimostrazione esaustiva del teorema si veda: De Felice, Moriconi, 1991, *La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Modelli e Strategie*, Ed. Il Mulino, pag. 220

$$dW_N(t) = dW(i(t),t,a) - dW(i(t),t,b) = 0 \quad , \qquad [16]$$

vale a dire che fra le epoche t e $t+dt$ i due flussi devono produrre la stessa variazione di valore.

La [15] impone l'uguaglianza tra la *duration* stocastica del flusso dell'attivo e quello del passivo.

Per quanto ora detto, affinché sia garantita l'immunizzazione è sufficiente che i flussi *a* e *b,* una volta soddisfatto il vincolo di bilancio, abbiano la stessa rischiosità. La condizione sulle *duration* può essere anche riscritta come:

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi(t,t_k)a_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(t,t_k)b_k v(t,t_k) \quad . \qquad [17]$$

Si osserva che il teorema dell'immunizzazione stocastica permette, al tempo *t,* di selezionare un portafoglio che è istantaneamente non rischioso, cioè il vincolo di bilancio e la condizione di *duration* soddisfatti in *t* non si mantengono costanti per istanti successivi poiché è continuamente variabile il processo del tasso *i(t);* questo implica che l'immunizzazione stocastica richiede una ricalibratura continua del portafoglio.

1.3 IL TEOREMA DELL'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA NEL MODELLO CIR

Descriviamo ora il modello stocastico relativo alla dinamica nel tempo dei tassi d'interesse al quale ci riferiremo nel corso del lavoro.

Nel modello CIR[4] si assume un processo diffusivo per il tasso locale del tipo:

$$di(t) = \alpha[\gamma - i(t)]dt + \rho\sqrt{i(t)}dW(t), \qquad \alpha,\gamma,\rho \geq 0, \qquad [18]$$

[4] Si vedano in proposito Cox, Ingersoll, Ross, 1985, *An intertemporal general equilibrium model of asset prices,* Econometrica, 53/2 pp. 363-384 e Cox, Ingersoll, Ross, 1985, *A theory of the term structure of interest rates,* Econometrica, 53/2, pp. 385-407.

dove W_t è il moto browniano standard, $\alpha[\gamma - i(t)]$ è il tasso di drift istantaneo del processo con γ tasso normale di lungo periodo e $\rho\sqrt{i(t)}$ è il coefficiente di diffusione dipendente da *i(t)*. In base a tale modello, il prezzo di uno zero coupon bond con maturity *t* valutato all'epoca *k* assume la forma:

$$v(i(t),k,t) = A(k,t)e^{-i(t)B(k,t)}, \qquad [19]$$

con:

$$A(k,t) = \left\{ \frac{2he^{(\alpha-\pi+d)(t-k)/2}}{(\alpha-\pi+d)\left[e^{h(t-k)}-1\right]+2h} \right\}^{2\alpha\gamma/\rho^2}, \qquad [20]$$

$$B(k,t) = \frac{2\left[e^{h(t-k)}-1\right]}{(\alpha-\pi+d)\left[e^{h(t-k)}-1\right]+2h}, \qquad [21]$$

$$h = \sqrt{(\alpha-\pi)^2 + 2\rho^2}, \qquad [22]$$

e π costante derivante dalla funzione del prezzo di mercato per il rischio, nel modello uguale a:

$$\Pi = \frac{\pi\sqrt{i(t)}}{p}. \qquad [23]$$

Dall' espressione [19] risulta che la rischiosità $\varphi = -\frac{v_i}{v}$ coincide con il fattore *B(k,t)*[5] ed è dunque funzione della durata residua τ=*(t-k),* indipendente da *i*. Si ha quindi che:

$$\varphi(\tau) = B(\tau) = \frac{2\left[e^{h\tau}\right]}{(\alpha - \pi + d)\left[e^{h\tau} - 1\right] + 2h}. \qquad [24]$$

La [24] si caratterizza per essere una funzione continua, monotona crescente e dunque invertibile. La *duration* stocastica, per un generico flusso d'importi *a,* diviene pertanto:

$$D(t,a) = \left[B^{-1}\left[\frac{\sum_{k=1}^{m} B(t_k - t) a_k v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} a_k v(t,t_k)} \right] - t \right]. \qquad [25]$$

Una volta definito il modello che descrive la dinamica del tasso d'interesse nel tempo, consideriamo ora i modelli d'immunizzazione stocastica. Descriveremo brevemente quelli descritti da De Felice e Moriconi[6] e, più in particolare, faremo riferimento ai modelli di selezione di portafogli a minimo costo e con massima aspettativa di valore.

[5] Si veda in proposito De Felice, Moriconi, 1991, *La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Modelli e strategie,* Ed. Il Mulino, pag. 230
[6] Si veda in proposito De Felice, Moriconi, 1991, *La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Modelli e strategie,* Ed. Il Mulino, pp. 243 e successive

1.3.1 IL TEOREMA DELL'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA: SELEZIONE DI PORTAFOGLI IMMNUNIZZATI A MINIMO COSTO

Sulla scorta del teorema generale di immunizzazione stocastica è possibile mettere a punto delle strategie di selezione di portafoglio considerando le opportunità d'investimento esistenti sul mercato, in un determinato momento, a copertura di un flusso passivo descritto da una serie di *cash flow* e da uno scadenzario determinati.

Supponiamo di considerare il flusso *b* del passivo con queste componenti $b_1, b_2, \dots\dots\ b_m$ e scadenzario $t_1, t_2, \dots\dots\ t_m$. Supponiamo che gli attivi da selezionare disponibili sul mercato siano rappresentati da una matrice *A(n x m)* in cui la generica componente, a_{ik} , rappresenti il *cash flow* dell'i-esimo attivo esigibile all'epoca t_k , con *i=1,2,...,n* e *k=1,2,...,m.* Rappresentiamo la generica matrice delle opportunità d'investimento *A* nella quale considereremo diverse tipologie di titoli privi di rischio e quindi non solo zero coupon bond.

$$A = \begin{cases} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots\dots & \dots\dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots\dots & \dots\dots & a_{2,n} \\ \dots\dots & \dots\dots & a_{i,k} & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots\dots & \dots\dots & a_{n,m} \end{cases}$$

Scopo principale di questa strategia di selezione è individuare la composizione ottima del portafoglio con aliquote di composizione $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots\ \alpha_n)$ da scegliere tra le *n* attività presenti sul mercato data la struttura per scadenza $v(i(t), t, s)$ esistente all'epoca *t*, in modo che il portafoglio risulti sempre in *t* istantaneamente non rischioso.

Si tratterà in sostanza di individuare il vettore degli attivi *a,* con *n* componenti uguali a:

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ik} \quad , \qquad [26]$$

che soddisfi contemporaneamente il vincolo di bilancio il quale tenendo conto della [14], può essere così riformulato:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k v(t,t_k) \quad , \qquad [27]$$

e la condizione sulle *duration*:

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi(t-t_k) a_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(t-t_k) b_k v(t,t_k) \quad , \qquad [28]$$

equivalente all'espressione già individuata dalla [17].

Una volta definito il modello generale di selezione del portafoglio e i vincoli ai quali tale procedura di selezione risulta condizionata, individuiamo la funzione obiettivo che il Fondo, per ogni procedura di selezione, può perseguire sia con lo scopo di procedere ad una sua minimizzazione o ad una sua massimizzazione.

Ipotizziamo che l'obiettivo perseguito dal Fondo sia quello di selezionare un portafoglio istantaneamente non rischioso, a minimo costo.
Si tratterà di individuare quella composizione ottima di portafoglio che soddisfi ai vincoli di bilancio e di *duration* e che, inoltre renda minima la funzione obiettivo:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \quad , \qquad [29]$$

avendo indicato con $q = (q_1 , q_2 ,........ q_n)$ il vettore delle quotazioni del paniere delle opportunità di mercato all'epoca *t.*

Il problema di selezione di portafoglio con minimo costo che sia istantaneamente non rischioso all'epoca *t* con riferimento ad un dato flusso passivo, è allora un problema di programmazione lineare del tipo:

$$min \ \ Z (t) = min \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \quad , \qquad [30]$$

soggetto ai vincoli:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k v(t , t_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k v(t , t_k) \quad , \qquad [30.1]$$

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi (t - t_k) a_k v(t , t_k) = \sum_{k=1}^{m} \varphi (t - t_k) b_k v(t , t_k) \quad , \qquad [30.2]$$

$$\alpha_i \geq 0 \ , \qquad i = 1,2,......, \ n \quad . \qquad [30.3]$$

1.3.2 IL TEOREMA DELL'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA: SELEZIONE DI PORTAFOGLI IMMUNIZZATI CON MASSIMA ASPETTATIVA DI VALORE

Abbiamo osservato che la procedura di selezione di portafogli attraverso il teorema di immunizzazione stocastica è in grado di generare solo portafogli che siano istantaneamente non rischiosi perché il processo che regola l'evoluzione nel tempo dei tassi d'interesse si modifica continuamente e non mantiene costanti i vincoli di bilancio e di *duration* ad istanti successivi a *t*. Ciò vuol dire che solo procedendo ad una ricalibratura continua del portafoglio questo risulterà essere perfettamente immunizzato. Se si ipotizza di procedere a ricalibrare il portafoglio ad intervalli di tempo determinati e discreti, ha senso individuare quel portafoglio

che al tempo t risulti immunizzato ma che garantisca la massima aspettativa di valore netto nell'istante successivo T di ricalibratura. Si tratterà quindi di "selezionare quel portafoglio istantaneamente non rischioso per ritrovarlo "nel modo migliore possibile" alla successiva apertura di mercato"[7].
Definiamo il valore atteso del portafoglio come:

$$E_t\left[W_N(i(T),T)\right]=\sum_{k=1}^{m}(a_k-b_k)E_t\left[v(i(T),T,t_k)\right] \qquad [31]$$

Appare evidente dalla [31] che il calcolo di questo valore atteso, è di fatto riconducibile al calcolo del valore della funzione $E_t\left[v(i(T),T,t_k)\right]$.

Sfruttando il modello CIR è possibile individuare un'espressione in forma chiusa[8] per il calcolo dell'espressione suddetta. Sarà:

$$E_t\left[v(i(T),T,t_k)\right]=A(T,s)\omega_{t,T}\left[B(T,s)\right]. \qquad [32]$$

Calcolato tale valore atteso, il problema di selezione di un portafoglio a copertura del flusso passivo b che sia istantaneamente non rischioso all'epoca t e che abbia, inoltre, la massima aspettativa di valore nell'istante successivo $T=t+\tau$, sarà ancora un problema di programmazione lineare del tipo:

$$max\ \ Z(t)=max\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{k=1}^{m}a_{ik}E_t\left[v(t+\tau,t_k)\right], \qquad [33]$$

[7] Si veda in proposito De Felice, Moriconi, 1991, *La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Modelli e strategie,* Ed. Il Mulino, pag. 251
[8] Per una dimostrazione formale delle formule si veda De Felice, Moriconi, 1991, *La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Modelli e strategie,* Ed. Il Mulino, pag. 251

soggetto ai vincoli:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{m} a_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k v(t,t_k) \quad , \qquad [33.1]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{m} \varphi(t-t_k) a_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(t-t_k) b_k v(t,t_k) \quad , \quad [33.2]$$

$$\alpha_i \geq 0 \, , \qquad i = 1,2,\dots\dots, n \; . \qquad [33.3]$$

1.4 LA *DURATION* DI UN *CASH FLOW* STOCASTICO[9]

Una volta individuate le strategie di immunizzazione stocastica che possono essere perseguite dai vari investitori, nel nostro caso da un Fondo Pensione, si è provveduto a fare alcune considerazioni aggiuntive sulla variabile aleatoria passività complessiva del Fondo stesso, nel senso di individuare prima quale siano le componenti che descrivono tale variabile e poi di formularne un'apposita misura di rischiosità, considerando che l'incertezza non è in questo caso solo legata alla possibile dinamica nel tempo dei tassi d'interesse, quindi di tipo finanziario, ma anche di tipo attuariale dovendo il Fondo pagare delle somme il cui ammontare è strettamente dipendente dall'evoluzione nel tempo della propria popolazione.

Si è provveduto quindi, compatibilmente alle strategie di immunizzazione descritte, ad individuare una misura di rischiosità dapprima rielaborando opportunamente la formula della *duration* di Macauley in ipotesi di tipo deterministico per ciò che riguarda la struttura per scadenza dei tassi, mantenendo

---

9 Si vedano in proposito Foschini G., Pasqualitto E., *La duration di un cash flow stocastico,* presentato al convegno Mtisd '04 del 24/25 giugno, presso l'Università del Sannio di Benevento, in corso di stampa e Pasqualitto E.,*"La duration stocastica di un cash flow stocastico"* presentato al convegno "New Mathematical Methods in Risk Theory" Firenze, 6-8 ottobre 2005

dunque la sola aleatorità per la componente demografica, per rivedere poi il tutto in un contesto stocastico combinando l'incertezza attuariale con quella finanziaria in ipotesi di una dinamica nel tempo dei tassi d'interesse così come è stata elaborata all'interno del modello CIR.

1.4.1 LE PASSIVITA' DI UN FONDO PENSIONE

Un Fondo Pensione invalidità, vecchiaia e superstiti prevede le seguenti prestazioni:

- pensioni (dirette[10]) di anzianità o vecchiaia all'attivo al compimento di determinate anzianità di servizio o al raggiungimento di una data età;
- pensioni (dirette) di invalidità all'attivo che diventa invalido permanente;
- pensioni (indirette[11]) ai superstiti dell'attivo;
- pensioni (di reversibilità[12]) ai superstiti del pensionato d'invalidità che muore;
- pensioni (di reversibilità) ai superstiti del pensionato di anzianità o vecchiaia che muore.

La misura di tali oneri per il Fondo non è nota a priori: il loro valore dipenderà, infatti, dal verificarsi o meno dell'evento cui è legata la prestazione garantita e dall'epoca in cui essa si verifica. La variabile aleatoria "passività complessiva" del Fondo Pensione può essere stimata attraverso il valore atteso dei pagamenti che il Fondo dovrà effettuare fino al termine del contratto ed il nostro obiettivo sarà dunque quello di esplicitare la variabile casuale "onere del Fondo Pensione." Supponiamo che[13]:

---

[10] La pensione diretta è una rendita vitalizia che viene riconosciuta al lavoratore che lascia l'attività lavorativa per raggiunti limiti d'età o di anzianità contributiva, oppure per invalidità o inabilità.

[11] La pensione indiretta è una rendita vitalizia o temporanea corrisposta ai superstiti dell'assicurato che muore durante il periodo di attività lavorativa.

[12] La pensione di reversibilità è una rendita vitalizia o temporanea corrisposta ai superstiti nel caso di morte del pensionato titolare di pensione diretta.

[13] Si veda F. Grasso, *Elementi di tecnica attuariale della previdenza pubblica di base*, 2001, Working Paper n. 14, Dipartimento di Matematica per le Decisioni, Università degli Studi di Firenze, pp. 9-10.

- la gestione del Fondo avvenga per un numero finito N di anni con riferimento ad una collettività chiusa;
- w sia l'età massima raggiungibile in vita dagli iscritti, mentre X e H siano rispettivamente l'età e l'anzianità massime raggiungibili dall'attivo, nel senso che al raggiungimento di una di esse si abbia il pensionamento per vecchiaia o anzianità, per cui in relazione ad un iscritto che abbia età x e anzianità h sia T l'ulteriore durata massima in assicurazione così definita:

$$T = min(X - x, H - h);$$

- l'ammontare della pensione diretta sia commisurato all'anzianità di servizio secondo percentuali prefissate dell'ultima retribuzione;
- l'ammontare della pensione di reversibilità o indiretta sia un'aliquota della corrispondente pensione diretta, fissata in relazione alla composizione del nucleo familiare superstite;
- le pensioni ed i contributi siano corrisposti all'inizio dell'anno sicché siano $C_t\ (t = 0,1,......,N - 1)$ le contribuzioni relative alla collettività nell'anno di gestione $(t,t+1)$ e $O_t\ (t = 0,1,......,N - 1)$ i relativi oneri; queste successioni si intendono determinate come valori medi e riferiti finanziariamente all'inizio dell'anno di competenza.

Consideriamo, in particolare, un Fondo Pensione gestito con il sistema della capitalizzazione collettiva con premio medio generale. In un sistema con premio medio generale, l'equilibrio finanziario è ottenuto attraverso la definizione di un premio costante per tutta la durata di gestione N ed uguale per tutti gli assicurati. Di regola accade che la generazione iniziale è formata da individui più anziani di quelli che entreranno successivamente nel Fondo, sicché il premio medio generale non è sufficiente a coprire gli oneri derivanti dalla prima generazione ed è invece superiore nei confronti delle generazioni successive, le quali sono chiamate così a corrispondere un soprapremio, pari agli interessi maturati sul disavanzo, dato dalla differenza, in valore attuale, tra gli oneri e i contributi della generazione entrata all'epoca $t=0$. Un sistema che si basa sul premio medio generale genera pertanto tre tipi di riserve:

- riserva matematica per i pensionati vigenti;
- riserva matematica per gli attivi vigenti;
- riserva matematica per i futuri ingressi in assicurazione.

La prima costituisce la riserva degli oneri maturati, la seconda e la terza la riserva per gli oneri latenti[14]. Poiché vogliamo definire la passività complessiva per il Fondo Pensione, dobbiamo individuare sia le riserve che il Fondo ha già accumulato fino ad una generica epoca, sia i pagamenti futuri che il Fondo sarà chiamato ad effettuare da tale epoca in poi, per tutti gli attivi ed i pensionati che compongono il Fondo stesso, rappresentati dalla riserva matematica prospettiva complessiva[15]. Ai fini della valutazione della riserva V_k è formulata l'ipotesi che i contributi e le prestazioni pensionistiche che hanno dato luogo all'epoca k (a titolo anticipativo per l'anno di gestione $k+1$) non siano ancora avvenute (la valutazione riguarda la cosiddetta riserva terminale). Ovviamente risulterà $V_0 = V_N = 0$[16].

Definiamo inoltre:

- $O_t^{(A)}$= ammontare complessivo degli oneri per tutti gli attivi presenti all'epoca *t;*
- C_t = ammontare complessivo dei contributi riscossi dal Fondo per tutti gli attivi presenti all'epoca *t;*
- $O_t^{(P)}$ = ammontare complessivo degli oneri per tutti i pensionati presenti all'epoca *t;*

---

[14] Poiché stiamo considerando un Fondo gestito per un numero finito *N* di anni e a gruppo chiuso tralasceremo nel nostro modello la riserva matematica per i futuri ingressi in assicurazione.
[15] Si veda Honegger R., Mathis C., 1993, *Duration of life insurance liabilities and asset liability management,* 3rd International Colloquium AFIR, pag. 621;
[16] Si veda F. Grasso, 2001, *Elementi di tecnica attuariale della previdenza pubblica di base*, Working Paper n. 14, Dipartimento di Matematica per le Decisioni, Università degli Studi di Firenze, pag. 24.

Prima di procedere al calcolo delle riserve matematiche, dobbiamo individuare quali siano gli elementi che concorrono alla loro formazione, essendo gli stessi, come abbiamo già detto, caratterizzati da due fonti d'incertezza: attuariale e finanziaria. Provvederemo dunque al calcolo della riserva complessiva che definiremo stocastica, come segue. Poiché sia i contributi incassati che le prestazioni erogate dipenderanno per il Fondo dal verificarsi di eventi aleatori connessi alla durata di vita dell'individuo, il nostro primo obiettivo è quello di procedere alla definizione tanto dei contributi che delle prestazioni "probabilizzate"[17].

Con riferimento ad un singolo attivo di età *x* (con $x=\alpha,\alpha+1,....,T-1$), l'ammontare aleatorio dei contributi che il Fondo introiterà valutato all'epoca *k* per un generico anno di gestione *t* (con $t= k, k+1,...,N-1$) può essere rappresentato dalla:

$$\tilde{C}_{k,x} = \begin{cases} C_{t,x} & \text{con probabilità} \quad P_k(C_{t,x};t) \\ 0 & \text{con probabilità} \quad 1-P_k(C_{t,x};t) \end{cases}$$

in cui $P_k(C_{t,x};t)$ rappresenta la probabilità in *k*, secondo la misura *P*[18], che l'importo $C_{t,x}$ sarà riscosso all'epoca *t.* A questo punto i contributi probabilizzati, valutati all'epoca *k,* per un singolo attivo ad un generico anno *t* sono individuati dalla:

$$\overline{C}_{k,x}(t) = C_{t,x}P_k(C_{t,x};t) \quad .$$

[17] Si veda De Felice M., Moriconi F., 2002, *Finanza delle Assicurazioni sulla Vita. Principi per l'asset-liability management e per la misurazione dell'embedded value,* Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Volume LXV, pp. 13-89.

[18] Tale misura di probabilità P è ottenibile attraverso l'utilizzo di appositi modelli attuariali che, fondati sulla simulazione stocastica, consentono appunto di simulare, partendo da un assegnato collettivo composto di posizioni assicurative o pensionistiche per ciascun anno e per un certo numero di anni, la probabile evoluzione di ogni posizione assicurativa appartenente al collettivo.

Con riferimento alla totalità degli attivi presenti a tale epoca avremo:

$$\overline{C}_k(t) = \sum_{x=\alpha}^{T-1} C_{t,x} \cdot P_k(C_{t,x};t) \quad . \qquad [34]$$

Procediamo in modo analogo con riferimento agli oneri per gli attivi e per i pensionati. In relazione ad un attivo di età *x,* sia $\widetilde{O}_{k,x}^{(A)}$ la prestazione aleatoria valutata ad una generica epoca *k*, che il Fondo dovrà erogare in un generico anno *t*, definita come:

$$\widetilde{O}_{k,x}^{(A)} = \begin{cases} O_{t,x}^{(A)} & \text{con probabilità} \quad P_k(O_{t,x}^{(A)};t) \\ 0 & \text{con probabilità} \quad 1 - P_k(O_{t,x}^{(A)};t) \end{cases}$$

La prestazione probabilizzata sarà allora, con riferimento ad un singolo individuo, data dalla:

$$\overline{O}_{k,x}^{(A)}(t) = O_{t,x}^{(A)} P_k(O_{t,x}^{(A)};t),$$

mentre con riferimento alla totalità degli attivi avremo:

$$\overline{O}_k^{(A)}(t) = \sum_{x=\alpha}^{T-1} O_{t,x}^{(A)} \cdot P_k(O_{t,x}^{(A)};t) \ . \qquad [35]$$

In relazione ad un singolo pensionato di età *y* presente in un generico anno *t* sia $\widetilde{O}_{k,y}^{(P)}$ la prestazione aleatoria che il Fondo dovrà erogare valutata ad una generica epoca k, definita come:

$$\widetilde{O}^{(A)}_{k,y} = \begin{cases} O^{(P)}_{t,y} & \textit{con probabilità} \quad P_k(O^{(P)}_{t,y};t) \\ 0 & \textit{con probabilità} \quad 1-P_k(O^{(P)}_{t,y};t) \end{cases}$$

La prestazione probabilizzata sarà allora, con riferimento ad un singolo pensionato, data dalla:

$$\overline{O}^{(P)}_{k,y}(t) = O^{(P)}_{t,y} P_k(O^{(P)}_{t,y};t),$$

mentre con riferimento alla totalità dei pensionati avremo:

$$\overline{O}^{(P)}_{k}(t) = \sum_{y=T}^{w-x-1} O^{(P)}_{t,y} \cdot P_k(O^{(P)}_{t,y};t). \qquad [36]$$

Procediamo ora al calcolo della riserva. Ad una generica epoca k , con $0<k<N$, la riserva matematica prospettiva complessiva, V_k , è data dalla somma della riserva prospettiva per gli attivi, V_k^A e la riserva prospettiva per i pensionati, V_k^P :

$$V_k = V_k^A + V_k^P, \qquad [37]$$

dove è:

$$V_k^A = \sum_{t=k}^{N-1} \left(\overline{O}^{(A)}_k(t) - \overline{C}_k(t) \right) v(k,t) \qquad [38]$$

e

$$V_k^P = \sum_{t=k}^{N-1} \left(\overline{O}^{(P)}_k(t) - \overline{O}^{(A)}_k(t) \right) v(k,t) \qquad [39]$$

con *i(k,t)* tasso di rendimento del patrimonio del Fondo per il futuro[19].

Al fine di individuare la passività complessiva del Fondo dobbiamo anche definire l'ammontare delle riserve già accumulate dal Fondo stesso fino alla generica epoca k.

Sia $V_t^{A,P}$ l'ammontare delle riserve accantonate dal Fondo tanto per gli attivi che per i pensionati nell'anno *t*; l'ammontare complessivo delle riserve accumulate, fino ad una generica epoca k , sarà definito come:

$$V_k^{A,P} = \sum_{t=1}^{k} V_t^{A,P} (1 + i_t)^t \quad , \qquad [40]$$

con i_t tassi di rendimento annui del patrimonio del Fondo (effettivamente) realizzati fino all'epoca *k*.

La passività complessiva per il Fondo pensione all'epoca *k,* L_k , sarà pertanto la somma delle espressioni [38], [39] e [40]:

$$L_k = V_k^{A,P} + \sum_{t=k}^{N-1} \left(\overline{O}_k^{(A)}(t) - \overline{C}_k(t) \right) v(k,t) + \sum_{t=k}^{N-1} \left(\overline{O}_k^{(P)}(t) - \overline{O}_k^{(A)}(t) \right) v(k,t) \qquad [41]$$

Ovviamente la [41] è una grandezza aleatoria, essendo aleatori sia l'ammontare degli oneri futuri che il Fondo dovrà pagare sia i tassi di rendimento che saranno realizzati dal patrimonio del Fondo stesso .

1.4.2 L'ANALISI DELLA *DURATION* DELLE PASSIVITA' DEL FONDO

La *duration* è tradizionalmente definita come una misura della rischiosità di un progetto[20]: maggiore è la *duration* più elevata è la rischiosità del progetto

[19] Nell'applicazione del nostro lavoro si è considerato poi, conformemente ai dati a disposizione, un *i(k,t) =i* , ovvero un tasso di tipo deterministico sterilizzando dunque l'incertezza finanziaria delle poste considerate connessa a mutamenti nel tempo dei tassi d'interesse.

[20] Per la definizione di "progetto" si veda Bortot, P., Magnani, U., Olivieri, G., Rossi, F.A., Torrigiani, M. (1998) *Matematica Finanziaria*, Monduzzi Editore, Bologna, pp. 241 e seg.: "Un

considerato. Indichiamo i flussi (non negativi) di un progetto con il vettore $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots\dots\dots x_m)$ e il relativo scadenzario con il vettore $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots\dots\dots t_m)$; la *duration*, valutata ad una generica epoca *t*, è:

$$D(t,x) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t) V(t, x_k)}{V(t,x)} \qquad [42]$$

o, in modo analogo:

$$D(t,x) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t) p_k \qquad [43]$$

con

$$p_k = \frac{V(t, x_k)}{V(t,x)} \qquad \text{con } k=1,2,\dots..m$$

Dalla [43] risulta evidente che la *duration* è la media aritmetica ponderata delle *vite a scadenza* $(t_k - t)$ dei flussi, con pesi p_k eguali ai valori attuali dei singoli flussi normalizzati. Analogamente per ciascuna scadenza, rappresentando tutto su un asse temporale, se misuriamo i tempi a partire dall'istante *t* (di valutazione) la *duration* altro non è che l'ascissa del baricentro della distribuzione $\{p_k\}$ e ne fornisce dunque il momento primo.

Indichiamo con:

$$V(0,x) = \sum_{k=1}^{m} x_k v(0, t_k) = \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-t_k} \qquad [44]$$

la funzione valore attuale, calcolata all'epoca *t*=0, dei flussi relativi al progetto considerato. La derivata prima della [44] rispetto ad *i* è:

---

progetto economico-finanziario (brevemente: un progetto) non è altro che una successione di capitali, di segno qualsivoglia, previsti alle loro brave scadenze[…].".

$$\frac{\partial V(0,x)}{\partial i} = -\sum_{K=1}^{m} t_k x_k (1+i)^{-(t_k+1)} \quad . \qquad [44]$$

Se dividiamo la [45] per la [44] otteniamo:

$$\frac{\dfrac{\partial V(0,x)}{\partial i}}{V(0,x)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k x_k (1+i)^{-(t_k+1)}}{\sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-t_k}} = -\frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k x_k (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-t_k}} = -\frac{1}{(1+i)} \cdot D(0,x),$$

ovvero:

$$D(0,x) = -(1+i)\frac{\dfrac{\partial V(0,x)}{\partial i}}{V(0,x)}. \qquad [45]$$

Dalla [45] risulta che, a meno di una costante, la *duration* non è altro che la derivata logaritmica della funzione valore attuale. Infatti, la durata media finanziaria può essere definita come la misura della "sensibilità" (intesa come elasticità) del prezzo dell'obbligazione a seguito di variazioni dei tassi d'interesse[21].

La [45], definita *duration* di Macauley[22], si riferisce ad un *cash flow* deterministico.

[21] Si veda, ad esempio, Bortot, P., Magnani, U., Olivieri, G., Rossi, F.A., Torrigiani, M. (1998) *Matematica Finanziaria*, Monduzzi Editore, Bologna; Cetta, F., 1991, *Analisi Finanziaria ed Innovazione Tecnologica*, ed. CISU, Roma; Moriconi, F., 1994, *Matematica Finanziaria*, ed. Il Mulino, Bologna.

[22] Macaulay F., 1938, *Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yields and stock prices in the U.S. since 1856,* New York, National Bureau of Economic Research.

Lo stesso non può dirsi per le passività di un Fondo Pensione, le quali risultano essere calcolate prendendo come riferimento *cash flow*s stocastici[23]. Possiamo definire la *duration* delle passività di un Fondo Pensione come la variazione attesa nel valore attuale dei futuri pagamenti a seguito di variazioni dei tassi d'interesse, espressa come percentuale dei pagamenti attesi. Ipotizzando per il futuro ai fini del calcolo un tasso di rendimento del patrimonio del Fondo di tipo deterministico per cui si avrà *i(k,t) =i*, la *duration* delle passività del Fondo è:

$$D_{L_k} = -(1+i)\cdot\frac{\partial L_k}{\partial i}\cdot\frac{1}{L_k} \quad , \qquad [46]$$

avendo indicato con L_k il valore della passività complessiva del Fondo Pensione (si veda la [41]).

Pertanto:

$$\frac{\partial L_k}{\partial i} = -\left[\sum_{t=k}^{N-1}(t-k)\left(\overline{O}_k^{(A)}(t)-\overline{C}_k(t)\right)(1+i)^{-(t-k+1)}+\sum_{t=k}^{N-1}(t-k)\left(\overline{O}_k^{(P)}(t)-\overline{O}_k^{(A)}(t)\right)(1+i)^{-(t-k+1)}\right] \quad ,$$

ovvero:

$$\frac{\partial L_k}{\partial i} = -\frac{1}{1+i}\left[\sum_{t=k}^{N-1}(t-k)\left(\overline{O}_k^{(A)}(t)-\overline{C}_k(t)\right)(1+i)^{-(t-k)} + \sum_{t=k}^{N-1}(t-k)\left(\overline{O}_k^{(P)}(t)-\overline{O}_k^{(A)}(t)\right)(1+i)^{-(t-k)}\right] \qquad [47]$$

---

[23] Ricordiamo infatti che quanto il Fondo sarà chiamato a pagare dipende dal verificarsi di eventi legati alla durata aleatoria di vita degli individui iscritti al fondo stesso.

Infine sostituendo la [47] nella [46] si ha:

$$D_{L_k} = \frac{\sum_{t=k}^{N-1} (t-k)\left(\overline{O}_k^{(A)}(t) - \overline{C}_k(t)\right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} +$$

$$+ \frac{\sum_{t=k}^{N-1} (t-k)\left(\overline{O}_k^{(P)}(t) - \overline{O}_k^{(A)}(t)\right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} \qquad [48]$$

La [48] individua la *duration* per la v.a. “passività complessiva” del Fondo Pensione. La caratteristica fondamentale di tale espressione è che essa assume valori inferiori all’unità; in effetti ciò che abbiamo implicitamente assunto è che i pagamenti futuri per il Fondo Pensione siano calcolati con una probabilità che potremo definire “esatta” in quanto riflette l’effettiva evoluzione della popolazione dello stesso. In altri termini, i pagamenti futuri per il Fondo sono sempre allineati con la propria composizione ad ogni singola epoca e come tale non creano rigidità, a differenza di ciò che accade per i pagamenti in corso del Fondo che risentiranno del disallineamento tra la probabilità che ha determinato tali pagamenti e le nuove probabilità stimate. Per questo possiamo affermare che la *duration* della v.a. passività complessiva tiene conto solo dell’effetto rigidità ed è pari alla durata del flusso “rigido” cioè quella dei pagamenti in corso per il Fondo Pensione.[24] La [48] è funzione di:

- N =durata del periodo di gestione;
- i = tasso d’interesse impiegato per l’attualizzazione degli oneri;
- oneri che il Fondo sarà chiamato a pagare sia con riferimento agli attivi che ai pensionati;

[24] Si vedano in proposito Yawitz, Kaufold, Macirowski, Smirlock, “*The Pricing and Duration of Floating Rate Bonds”,* 1987, Journal of Portfolio Management e Caparrelli F., *Economia del mercato mobiliare,* Ed. McGraw-Hill.

- contribuzioni che il Fondo incassa all'epoca *t*.

Come evidenziato nella seguente Figura 1 all'aumentare (rispettivamente diminuire) della durata del periodo di gestione si verifica un aumento (rispettivamente diminuzione) del rischio di variazioni nel valore attuale dei futuri pagamenti del Fondo che si traduce in un aumento (rispettivamente diminuzione) della *duration*[25].

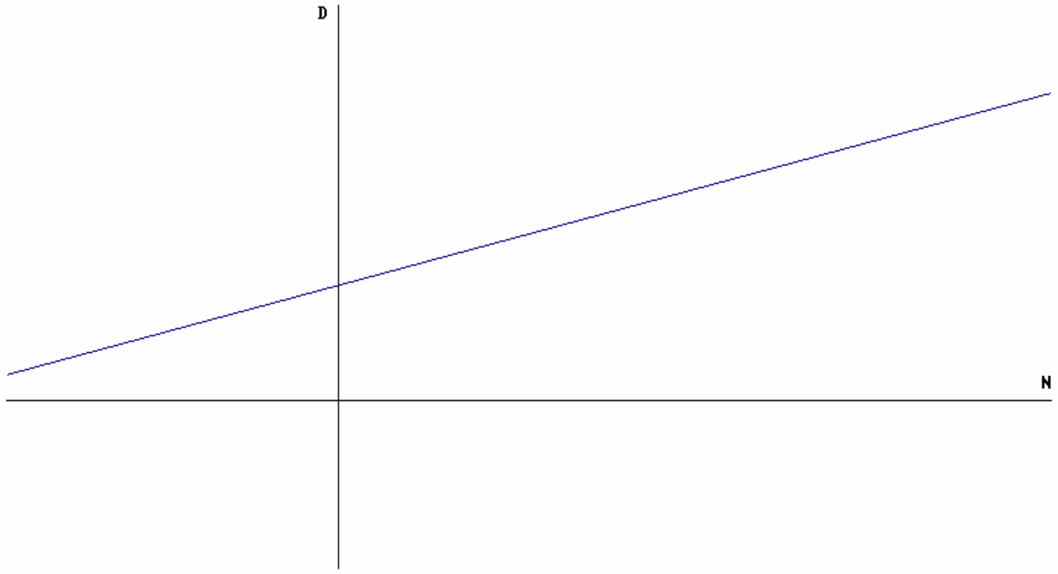

Figura 1: *Duration in funzione della durata del periodo di gestione (N)*

La seguente Figura 2 mostra invece come varia la *duration* della variabile aleatoria L_k, a seguito di variazioni nei tassi d'interesse. In particolare un aumento (rispettivamente diminuzione) del tasso di interesse[26] i comporta una

[25] Per ulteriori approfondimenti si veda l'Appendice 1 di questo lavoro.

[26] Il tasso di interesse può assumere valori $\in (-1;+\infty)$: valori minori di -1 non sono ammissibili (da un punto di vista finanziario). Se i=-100% siamo in presenza di un punto di discontinuità di II ordine.

diminuzione (rispettivamente aumento) nel valore delle passività del Fondo e conseguentemente una diminuzione (rispettivamente aumento) della *duration* .

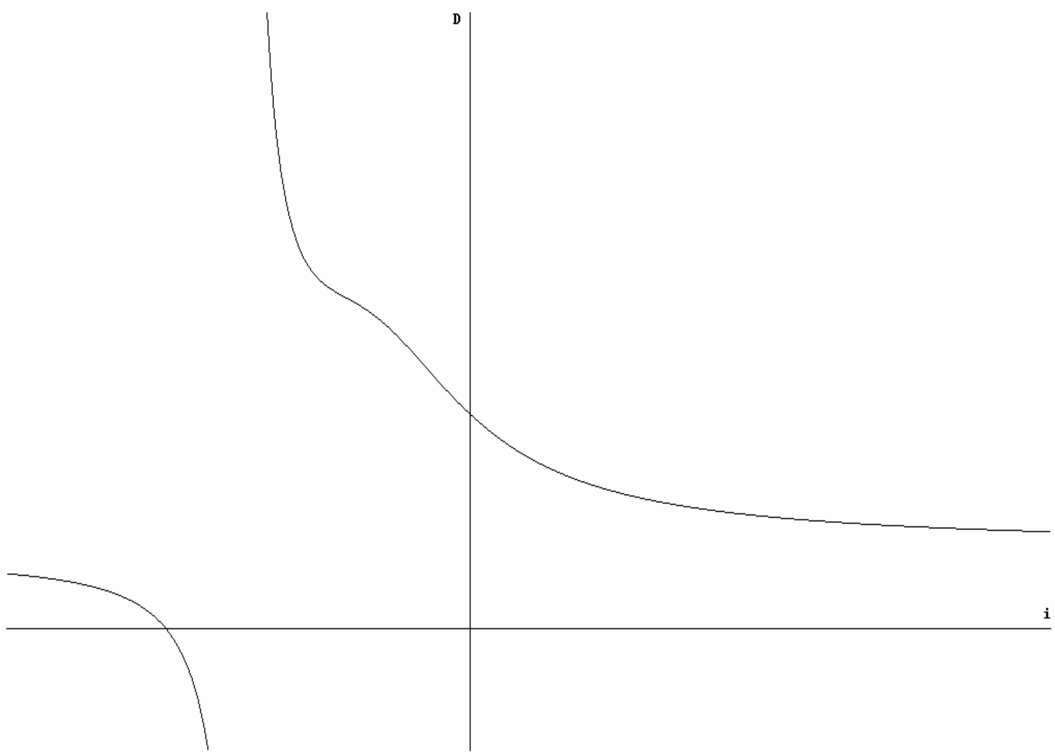

Figura 2: *Duration in funzione del tasso di interesse (i)*

La successiva Figura 3 evidenzia invece, quale sia l'andamento della *duration* al variare degli oneri O_t sia per gli attivi che per i pensionati e dei contributi incassati C_t. Va osservato che la derivata della [48] rispetto agli stessi è positiva, dunque la *duration* risulta crescente al crescere di questi ultimi.

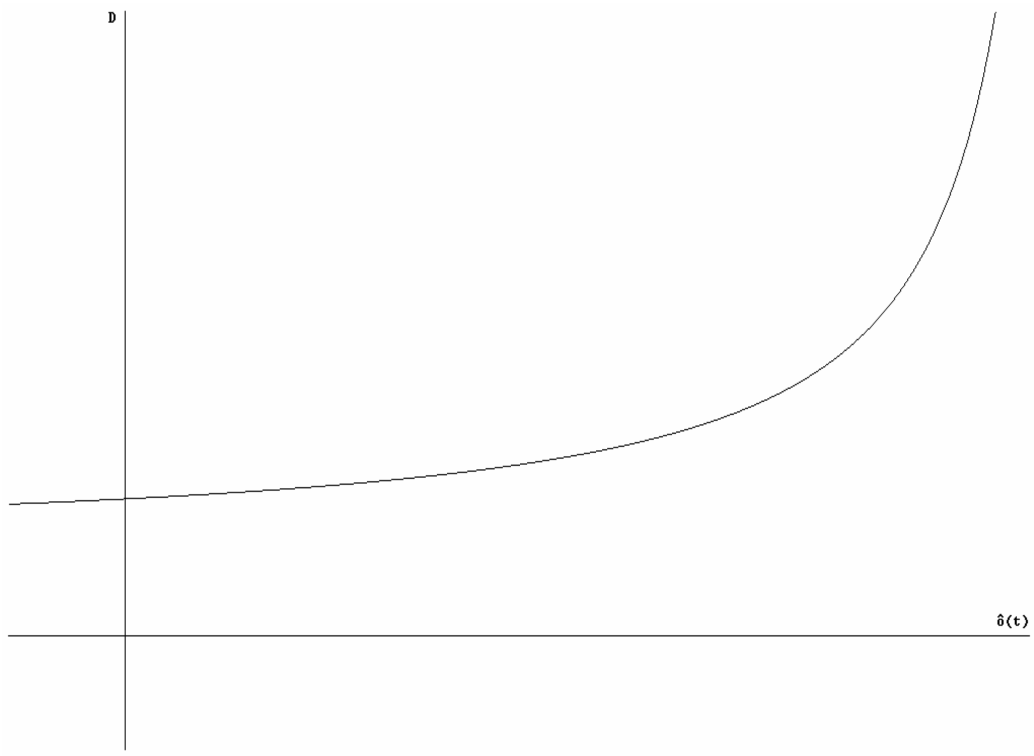

Figura 3: *Duration in funzione di* $\overline{O}_t$

1.4.3 LA *DURATION* COME VALORE ATTESO DI UNA VARIABILE CASUALE

L'obiettivo dell'*asset liability management* di un Fondo Pensione è, per ipotesi, l'immunizzazione dei surplus sulla base del perfetto *matching* tra la *duration* delle attività e quella delle passività. Il mancato raggiungimento di questo obiettivo può derivare dal cosiddetto rischio di *mismatching* il quale è più accentuato in virtù del fatto che la v.a. "pagamenti" per il Fondo Pensione ha una varianza influenzata sia dalla natura aleatoria delle variabili che influiscono sulla sua determinazione sia dalla sensibilità della variabile "pagamenti" ai cambiamenti nei tassi d'interesse. Per poter definire la varianza della v.a. "passività complessiva" di un Fondo Pensione, sfruttiamo alcune proprietà della *duration*.

Abbiamo definito nel §5.2 la *duration* come il momento primo della distribuzione $\{p_k\}$. E' possibile ricavare altri indicatori temporali estendendo la definizione al caso di momenti di ordine superiore al primo. Più in particolare, si definisce momento di secondo ordine, o *duration* di secondo ordine, la seguente espressione:

$$D^{(2)}(t,x) = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t)^2 \, p_k \quad , \qquad [49]$$

la quale esprime la media ponderata dei quadrati delle vite a scadenza $(t_k - t)$, con pesi pari ai valori attuali dei flussi, così come definiti nella [41] e fornisce una misura della dispersione temporale dei flussi x_k rispetto a *t*. La stessa *duration* di secondo ordine può essere calcolata a partire dal rapporto tra la derivata seconda della funzione valore attuale e la funzione stessa. Partendo dalla formula [44] e derivando nuovamente rispetto ad *i* otteniamo:

$$\frac{\partial^2 V(0,x)}{\partial i^2} = \sum_{K=1}^{m} t_k (t_k + 1) x_k (1+i)^{-(t_k+2)} \quad , \qquad [50]$$

ovvero:

$$\frac{\partial^2 V(0,x)}{\partial i^2} = \frac{1}{(1+i)^2} \sum_{K=1}^{m} (t_k^{\,2} + t_k) x_k (1+i)^{-t_k} =$$

$$= \frac{1}{(1+i)^2} \left[\sum_{k=1}^{m} t_k^2 x_k (1+i)^{-t_k} + \sum_{k=1}^{m} t_k x_k (1+i)^{-t_k} \right] \qquad [51]$$

Dividiamo poi per *V(0,x)*. Si ha:

$$\frac{\partial^2 V(0,x)}{\partial i^2}\cdot\frac{1}{V(0,x)}=C_{0,x}=\frac{1}{(1+i)^2}\left[\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k^2 x_k (1+i)^{-t_k}}{V(0,x)}+\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k x_k (1+i)^{-t_k}}{V(0,x)}\right] \quad . \qquad [52]$$

La [52] individua un altro indicatore strategico, la convexity, $C_{0,x}$. Il termine:

$$D^{(2)}(0,x)=\left[\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k^2 x_k (1+i)^{-t_k}}{V(0,x)}\right] \qquad [53]$$

è la *duration* di secondo ordine.

Per la passività complessiva di un Fondo Pensione, la $D^{(2)}$, calcolata a partire dalla [46], è data dalla:

$$D_{L_k}^{(2)}=\frac{\sum_{t=k}^{N-1}(t-k)^2\left(\overline{O}_k^{(A)}(t)-\overline{C}_k(t)\right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k}+$$
$$+\frac{\sum_{t=k}^{N-1}(t-k)^2\left(\overline{O}_k^{(P)}(t)-\overline{O}_k^{(A)}(t)\right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} \qquad [54]$$

La $D_{L_k}^2$ è funzione della durata del periodo di gestione *N,* del tasso di interesse *i*, e degli oneri di gestione. In particolare, l'andamento di $D_{L_k}^2$ rispetto a variazioni del periodo di gestione è crescente, tendendo ad infinito se *N* diverge (si conferma quindi quanto già osservato con la *duration* di primo ordine).

Stesse considerazioni si possono fare per le variazioni relative della $D^2_{L_k}$ rispetto ai tassi di interesse (si vedano la Figura 4 e la Figura 5), così come si conferma l'andamento per la *duration* di secondo ordine rispetto a quanto visto per la *duration* con riferimento agli oneri.

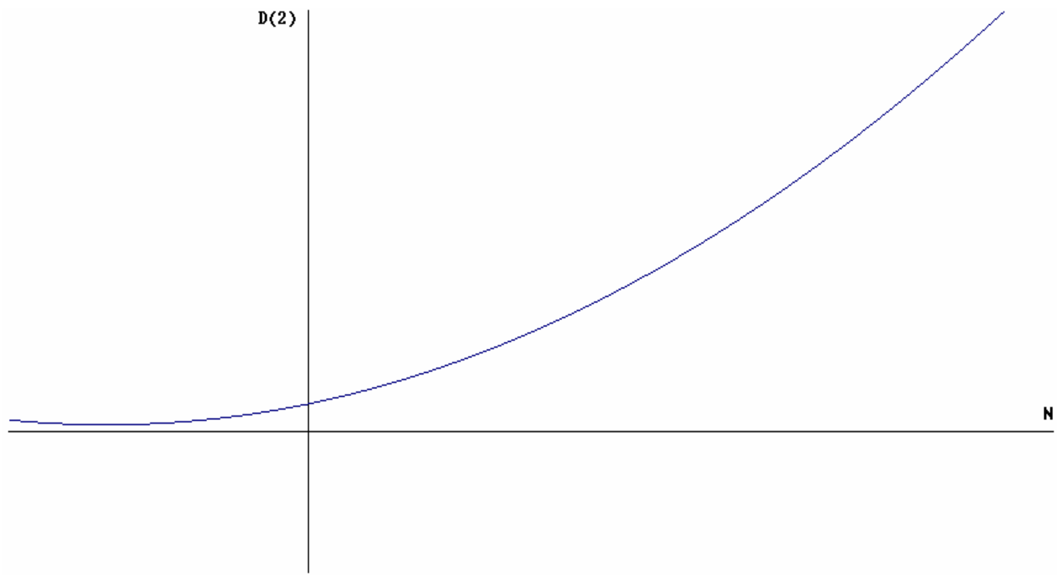

Figura 4: *$D^{(2)}$ in funzione degli anni di gestione N*

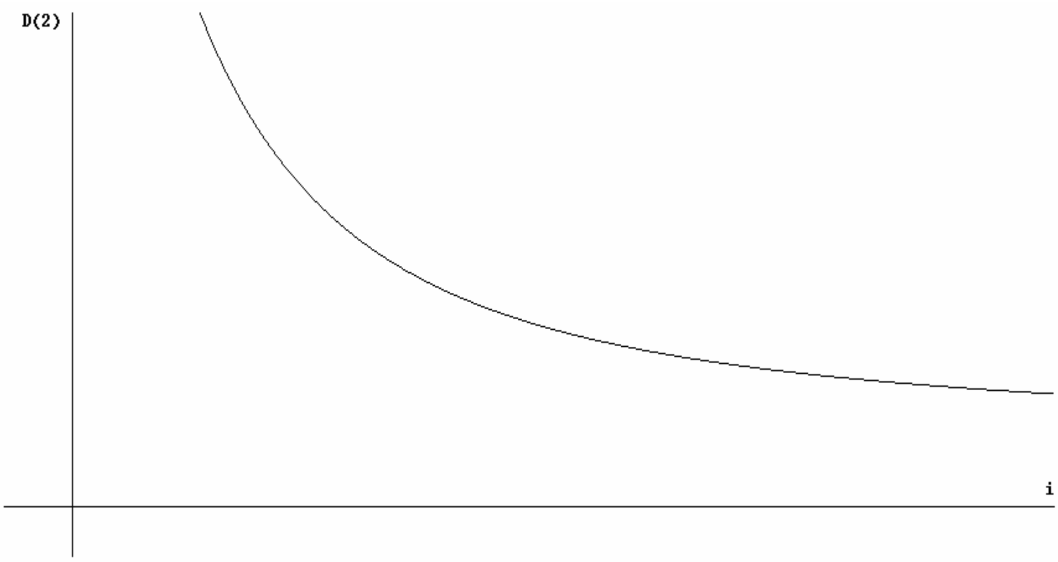

Figura 5: *$D^{(2)}$ in funzione del tasso di interesse (i)*

Si vuole ora introdurre una misura della rischiosità del flusso preso in considerazione. Ricordando che la varianza di una generica variabile aleatoria X è:

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad [55]$$

la varianza della variabile aleatoria L_k è:

$$\sigma^2(L_k) = \left[\frac{\sum_{t=k}^{N-1} (t-k)^2 \left(\overline{O}_k^{(A)}(t) - \overline{C}_k(t) \right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sum_{t=k}^{N-1} (t-k)^2 \left(\overline{O}_k^{(P)}(t) - \overline{O}_k^{(A)}(t) \right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} \right] + \qquad [56]$$

$$- \left[\frac{\sum_{t=k}^{N-1} (t-k) \left(\overline{O}_k^{(A)}(t) - \overline{C}_k(t) \right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sum_{t=k}^{N-1} (t-k) \left(\overline{O}_k^{(P)}(t) - \overline{O}_k^{(A)}(t) \right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} \right]^2$$

Poiché la [56] è ottenuta come differenza tra la *duration* di secondo ordine e il quadrato della *duration* stessa, è anch'essa funzione della durata del periodo di gestione considerato, N, del tasso d'interesse i, impiegato per l'attualizzazione dei flussi e del valore degli oneri aleatori annui che il Fondo sarà chiamato a pagare agli attivi e ai pensionati.

In particolare la seguente Figura 6, mostra come un aumento (rispettivamente diminuzione) della durata del periodo di gestione N, provocherà un aumento (rispettivamente diminuzione) di tale rischio (al limite tale rischio diverge per N che tende ad infinito).

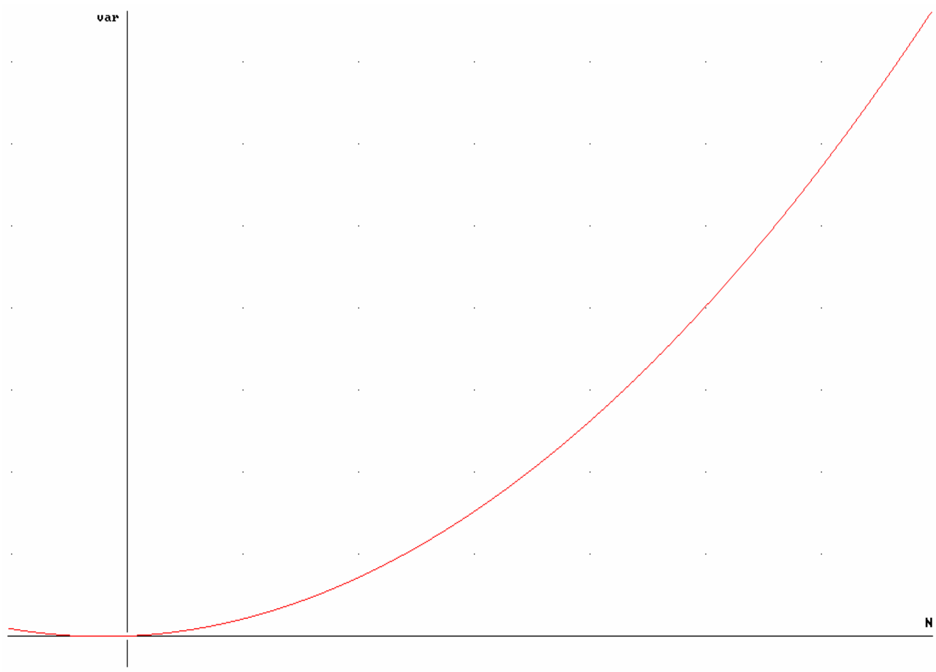

Figura 6: *varianza della v.a.* L_k *in funzione della durata del periodo di gestione N*

La Figura 7 mostra invece l'effetto di variazioni dei tassi di interesse[27] sulla varianza della v.a. $\boldsymbol{L_k}$. Più in dettaglio tale effetto dipende dal livello iniziale del tasso stesso: infatti la varianza del passivo tende ad aumentare se i tassi di interesse aumentano ma fino ad un valore massimo, oltre tale punto stazionario un aumento dei tassi d'interesse si traduce in una diminuzione della varianza.

[27] Consideriamo tassi di interesse $i \in (-1;+\infty)$.

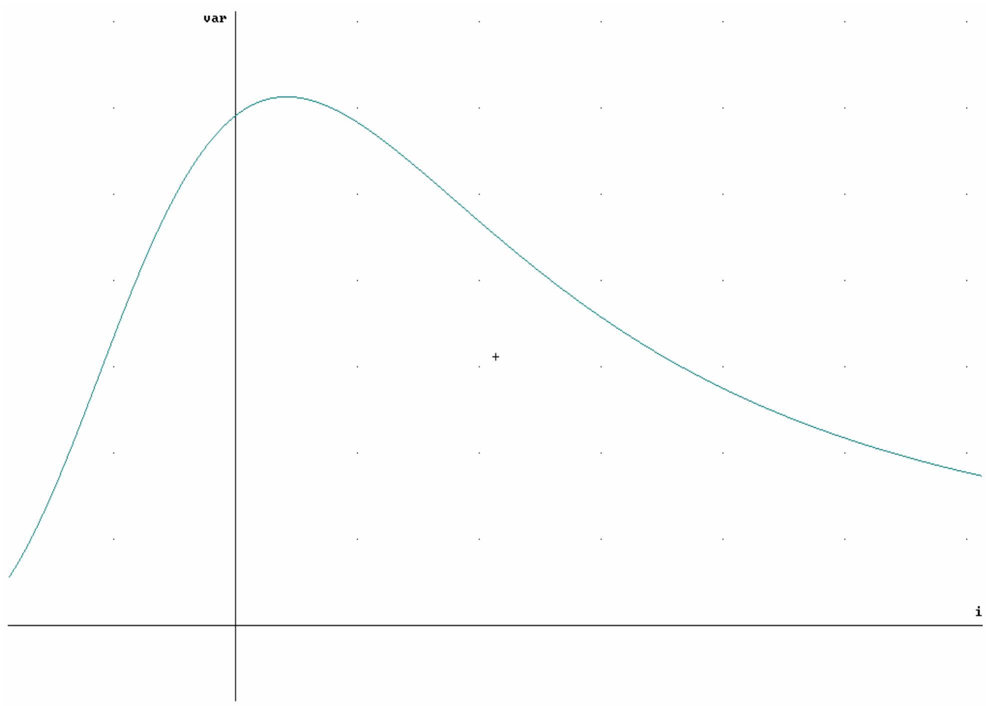

Figura 7: *varianza della v.a. L_k in funzione del tasso d'interesse i*

Infine, la Figura 8 mostra invece quale sia l'andamento della varianza al variare degli oneri annui che il Fondo deve pagare. Dall'analisi condotta risulta che la varianza risulta crescente in modo asintotico all'aumentare degli stessi.

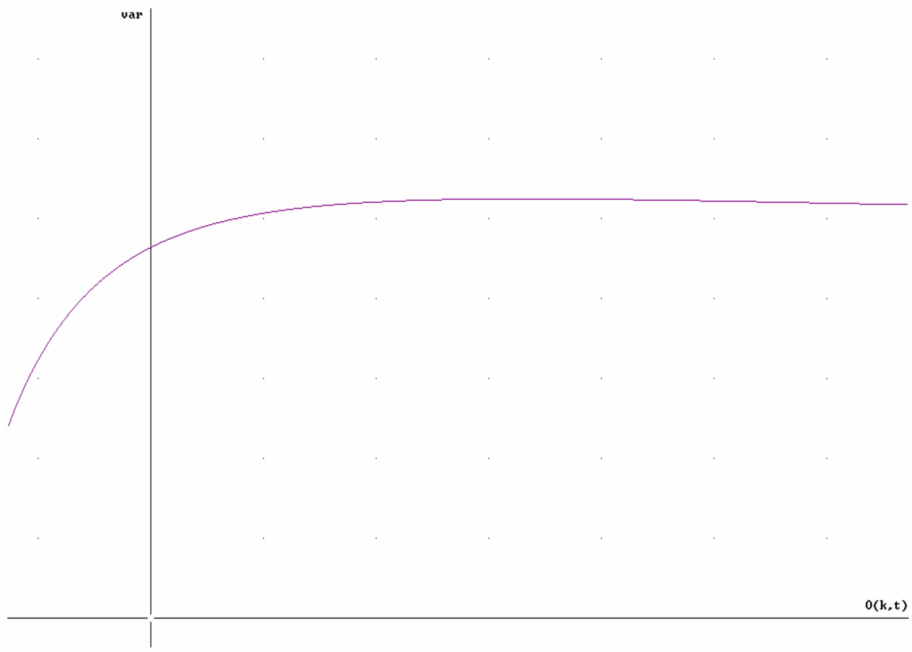

Figura 8: *varianza della v.a.* L_k *in funzione degli oneri annui*

1.4.4 IL RISCHIO DI UN FONDO PENSIONE: UN CASO PRATICO

Consideriamo un Fondo Pensione Preesistente[28] (FPP). Per l'analisi svolta si sono esaminati i dati relativi al bilancio tecnico del FPP alla data del 31/12/02 e, in particolare, i dati della "Sezione I" di detto Fondo, a prestazione definita, relativi agli iscritti (attivi e pensionati) presenti alla data del 27/04/93. Il periodo di gestione considerato si estende fino al 2077, anno in cui la collettività non è ancora esaurita, ma ha una consistenza assai ridotta. Ai fini del nostro lavoro e compatibilmente con i dati a disposizione, considereremo un periodo di gestione più breve: dal 31/12/02 (epoca *k*) al 31/12/23. Gli impegni futuri complessivi del Fondo Pensione a tale data (riserva matematica complessiva), ammontano a 5.284.888.957,00€, così ripartiti:

[28] Si tratta di quelle forme pensionistiche complementari, istituite antecedentemente all'entrata in vigore del D.Lgs. 421/92. L'art. 18 comma 1, del D.Lgs n. 124/93 prevede che tali forme pensionistiche, debbano adeguarsi entro dieci anni, a partire dalla data di entrata in vigore del D.Lgs. 124/93, alle disposizioni attuative dell'articolo 6 di detto decreto in materia di regime delle prestazioni e dei modelli di gestionali adottati, secondo le norme specificatamente emanate dal Ministero dell'Economia.

- riserva prospettiva per i pensionati: 3.919.713.568,00€;
- riserva prospettiva per gli attivi: 1.365.175.389,00€.

La valutazione della riserva matematica è effettuata secondo il regime tecnico-finanziario della capitalizzazione completa a gruppo chiuso: si considera infatti, in relazione all'attuale composizione della collettività iscritta alla Sezione I di detto Fondo, la previsione di tutti i futuri contributi (fino alla cessazione dal servizio dell'ultimo iscritto) e di tutti gli oneri futuri (fino al decesso dell'ultimo beneficiario).
Descriviamo ora le ipotesi impiegate per il calcolo di tali oneri.

A) Ipotesi demografiche:
La collettività iscritta alla Sezione I del Fondo, in data 31/12/02, si compone di 11.696 attivi e 9.048 pensionati; l'evoluzione nel tempo della popolazione del Fondo è stata effettuata attraverso il metodo MAGIS[29] ("Metodo degli anni di gestione su base individuale e per sorteggio).
Le tavole di sopravvivenza utilizzate sono state definite sulla base delle seguenti riduzioni :

- mortalità degli attivi e dei pensionati di vecchiaia/anzianità: tassi ISTAT 98 per età e sesso della popolazione italiana, dapprima ridotti del 50% sino all'età di 70 anni e di aliquote linearmente decrescenti per le età 71-90 anni, poi proiettati maggiorando di 2,5 anni la speranza di vita a 35 anni;
- mortalità degli invalidi: tassi ISTAT 98 maggiorati del 50% e poi proiettati come sopra;
- cessazione dal servizio per invalidità: tassi di mortalità ISTAT 98 ridotti al 30%;
- cessazione dal servizio per cause diverse dalla morte e dall'invalidità: tassi desunti dalle statistiche del Fondo relative al triennio 00/02.

[29] Si veda Tommasetti A., 1996, *Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni sociali*, Ed. Veschi, Vol I.

B) Ipotesi economiche:

- tasso annuo d'inflazione costante 2%;
- tasso annuo di rendimento netto ipotizzato per i futuri esercizi 4,75%.

Per calcolare la *duration* della passività del Fondo, definiamo innanzitutto il valore della passività complessiva del Fondo, L_k.

La passività complessiva è data dalla somma delle riserve già accumulate e degli oneri futuri del Fondo individuati dalla riserva matematica complessiva V_k. All'epoca k =31/12/02 dal bilancio tecnico si ha:

$V_{31/12/02}$ = 5.284.888.957,00€

Dall'analisi dei bilanci del Fondo relativi agli esercizi 1998, 1999, 2000, 2001 e 2002 risulta che l'ammontare delle riserve già accumulate fino all'epoca k=31/12/02 ammonta ad 272.300.189,00€. In particolare, tali riserve sono state capitalizzate sulla base della struttura dei rendimenti del patrimonio del Fondo riportata in Tabella 1:

t	i_t
1998	4,94%
1999	5,40%
2000	2,94%
2001	4,70%
2002	2,03%

Tabella 1: *struttura dei rendimenti del patrimonio del Fondo*

In base alla [41] la passività complessiva del fondo $L_{31/12/02}$ risulta essere pari a 5.557.189.146,00€.

La *duration*, in base alla [48], è:

$$D_{L_k} = \frac{\sum_{t=0}^{22}(t-k)\left(\overline{O}_k^{(A)}(t)-\overline{C}_k(t)\right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} +$$

$$+ \frac{\sum_{t=0}^{22}(t-k)\left(\overline{O}_k^{(P)}(t)-\overline{O}_k^{(A)}(t)\right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} = 0{,}951000374$$

La *duration* assume in genere un valore minore di uno e i risultati del caso esaminato confermano questa conclusione; questo deriva dal fatto che, mentre al denominatore abbiamo la passività complessiva ottenuta come somma delle riserve già accumulate e delle passività future, il numeratore è costituito solo dagli oneri futuri.

La *duration* di secondo ordine, in base alla [54], è:

$$D_{L\,k}^{(2)} = \frac{\sum_{t=0}^{22}(t-k)^2\left(\overline{O}_k^{(A)}(t)-\overline{C}_k(t)\right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} +$$

$$+ \frac{\sum_{t=0}^{22}(t-k)^2\left(\overline{O}_k^{(P)}(t)-\overline{O}_k^{(A)}(t)\right)(1+i)^{-(t-k)}}{L_k} = 14{,}60385477$$

Dunque la varianza del FPP esaminato in base alla [56] è:

$$\sigma^2(L_k) = D_{L_k}^{(2)} - (D_{L_k})^2 = 13{,}69945306 \quad .$$

Dai risultati ottenuti si può affermare che la varianza della passività complessiva risulta essere piuttosto bassa; ciò equivale ad affermare che la variabilità nei pagamenti futuri del Fondo Pensione sia piuttosto modesta.

Procediamo ora ad individuare quale sia l'effetto prodotto sulle grandezze individuate, da una variazione nei tassi d'interesse. I risultati ottenuti sono rappresentati in Tabella 2:

	i=4,75%	*i'=4,5%*	*i''=5%*
D	0,9510	0,9527	0,9493
$D^{(2)}$	14,6039	14,6616	14,5453
σ^2	13,6995	13,7540	13,6442

Tabella 2: *D, $D^{(2)}$ e σ^2 in funzione del tasso d'interesse i*

I risultati raggiunti ci consentono di affermare che una riduzione dei tassi d'interesse produce un aumento del valore delle passività del Fondo e dunque un aumento tanto di D che di $D^{(2)}$; questo si traduce in un aumento del rischio della variabilità dei futuri pagamenti e dunque della varianza. Al contrario, un aumento dei tassi produrrà una riduzione del valore delle passività e quindi si avranno valori più bassi tanto per D che per $D^{(2)}$ accompagnati da un più basso rischio di variazioni della variabile pagamenti futuri che sarà individuato da una varianza più contenuta.

1.5 IL VALORE ATTUALE DI UN FLUSSO D'IMPORTI E LA DEFINIZIONE DI *DURATION* STOCASTICA

Fino ad ora abbiamo ipotizzato che *i(k,t)=i* ovvero si è considerato un tasso di tipo deterministico sterilizzando dunque l'incertezza finanziaria delle poste considerate connessa a mutamenti nel tempo dei tassi d'interesse. Ciò che vogliamo fare adesso è calcolare invece, una misura della rischiosità di tale posta aleatoria qualora il modello operi in condizioni di incertezza non solo attuariale ma anche finanziaria, allorquando cioè il processo del tasso locale d'interesse costituisca un processo stocastico.

Procediamo calcolando il valore attuale dei flussi d'importi che definiscono la passività complessiva per il Fondo Pensione. A tal proposito poniamo:

$$\left(\overline{O}_k^{(A)}(t)-\overline{C}_k(t)\right)=x_k(t) \qquad [57]$$

e

$$\left(\overline{O}_k^{(P)}(t)-\overline{O}_k^{(A)}(t)\right)=y_k(t)\ . \qquad [58]$$

La [41] può essere riscritta come segue:

$$L_k=V_k^{A,P}+\sum_{t=k}^{N-1}x_t(t)v(k,t)+\sum_{t=k}^{N-1}y_t(t)v(k,t)\ , \qquad [59]$$

nella quale le due grandezze $\sum_{t=k}^{N-1}x_t(t)v(k,t)=W(k,X)$ e $\sum_{t=k}^{N-1}y_t(t)v(k,t)=W(k,Y)$ sono valori attuali di importi stocastici calcolati in ipotesi di struttura per scadenza di tipo deterministica.

In condizioni di incertezza anche sulla dinamica di tassi d'interesse, il valore ad oggi di queste due poste, calcolate all'epoca *k*, sarà funzione del livello del tasso locale osservato in *t*, cioè:

$$\sum_{t=k}^{N-1} x_k(t)v(i(t),k,t) = W(i(t),k,X)$$

e

$$\sum_{t=k}^{N-1} y_k(t)v(i(t),k,t) = W(i(t),k,Y).$$

Inoltre assumeremo come misura del rischio base del flusso d'importi *X* e *Y* le grandezze:

$$\Omega(i(t),k,X) = -\frac{W_i(i(t),k,X)}{W(i(t),k,X)}$$

e

$$\Omega(i(t),k,Y) = -\frac{W_i(i(t),k,Y)}{W(i(t),k,Y)},$$

che definiremo come la sensibilità, rispettivamente, del valore *W(k,X)* e del valore *W(k,Y)* alle variazioni aleatorie della struttura dei tassi.

Sulla scorta di quanto proposto da Cox, Ingersoll, Ross,[30] definiremo la *duration* stocastica dei flussi d'importi *X* e *Y* come segue:

$$D(k,X) = \varphi^{-1}\left[\frac{\sum_{t=k}^{N-1}\varphi(k,t)x_t(t)v(k,t)}{\sum_{t=k}^{N-1}x_t(t)v(k,t)}\right] - t \qquad [60]$$

[30] Si veda in proposito Cox, Ingersoll e Ross, 1979, *"Duration and the Measurement of Basis Risk"* Journal of Business, 52(1), pp.51-61.

e

$$D(k,Y)=\varphi^{-1}\left[\frac{\sum_{t=k}^{N-1}\varphi(k,t)y_t(t)v(k,t)}{\sum_{t=k}^{N-1}y_t(t)v(k,t)}\right]-t\ , \qquad [61]$$

avendo indicato con $\varphi^{-1}(.)$ la funzione inversa di $\varphi(i(t),k,t)$ rispetto alla variabile k purché questa risulti sempre rispetto a k, continua e strettamente monotona.

Combinando quanto visto nelle espressioni [60] e [61] la *duration* stocastica della v.a. passività complessiva del Fondo Pensione è ottenuta allora come segue:

$$D(k,L_k)=\left[\varphi^{-1}\left[\frac{\sum_{t=k}^{N-1}\varphi(k,t)x_t(t)v(k,t)+\sum_{t=k}^{N-1}\varphi(k,t)y_t(t)v(k,t)}{L_k}\right]-t\right]. \qquad [62]$$

In ipotesi di una dinamica dei tassi d'interesse come quella descritta dal modello CIR, per quanto già affermato nel §4, la [62] diviene:

$$D(k,L_k)=\left[B^{-1}\left[\frac{\sum_{t=k}^{N-1}B(t-k)x_t(t)v(k,t)+\sum_{t=k}^{N-1}B(t-k)y_t(t)v(k,t)}{L_k}\right]-t\right]. \qquad [63]$$

1.5.1 LA *DURATION* STOCASTICA DI UN *CASH FLOW* STOCASTICO: UN CASO PRATICO

Riprendiamo le informazioni del §5.4 e calcoliamo di nuovo la rischiosità della v.a. L_k con la formula messa a punto nella [63]. A tal fine abbiamo modificato in parte le ipotesi economiche precedentemente formulate utilizzando in questo caso anziché un tasso di attualizzazione di tipo deterministico, una curva dei rendimenti futuri che è stata ricavata nello schema CIR descritto al §4, attraverso una stima del modello effettuata sui dati del mercato italiano utilizzando una procedura a "due stadi". Più in dettaglio tale procedura prevede una prima fase nella quale vengono stimati i parametri α,γ e ρ^2 caratteristici del processo del tasso locale $\{i(t)\}$ dalla stima dell'equazione differenziale stocastica descritta nella [18], quindi viene stimato il parametro π, ricorrendo ad una procedura di regressione non lineare della struttura dei tassi sulle serie storiche dei rendimenti di Bot con diversa vita a scadenza[31].
In particolare, i parametri stimati del modello sono stati ripresi dal lavoro di Castignani M.[32] che ha riprodotto la procedura di stima seguita da De Felice, Moriconi, partendo dalla serie storica dei rendimenti dei Bot a 3, 6, 12 mesi dal 1992 al 1995. I valori stimati dei parametri risultano:

$$\hat{\alpha} = 0{,}024294488$$

$$\hat{\gamma} = 0{,}103562655$$

$$\hat{\rho}^2 = 0{,}000250519$$

$$\hat{\pi} = -0{,}3460910$$

I valori di *v(i(t),k,t)* e *r(i(t),k,t)* ottenuti attraverso la [19], partendo da uno spot rate *i(t)=8,62%* , sono riportati in Figura 9.

---

[31] Per maggiori chiarimenti si veda in proposito De Felice, Moriconi, 1991, *La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Modelli e strategie,* Ed. Il Mulino, pp. 233-240.

[32] Si veda in proposito Castignani M., *Analisi stocastica della struttura a termine dei tassi d'interesse sulla base del Modello Cox, Ingersoll e Ross* disponibile sul sito: http://digilander.libero.it/castignani/tesina1.htm

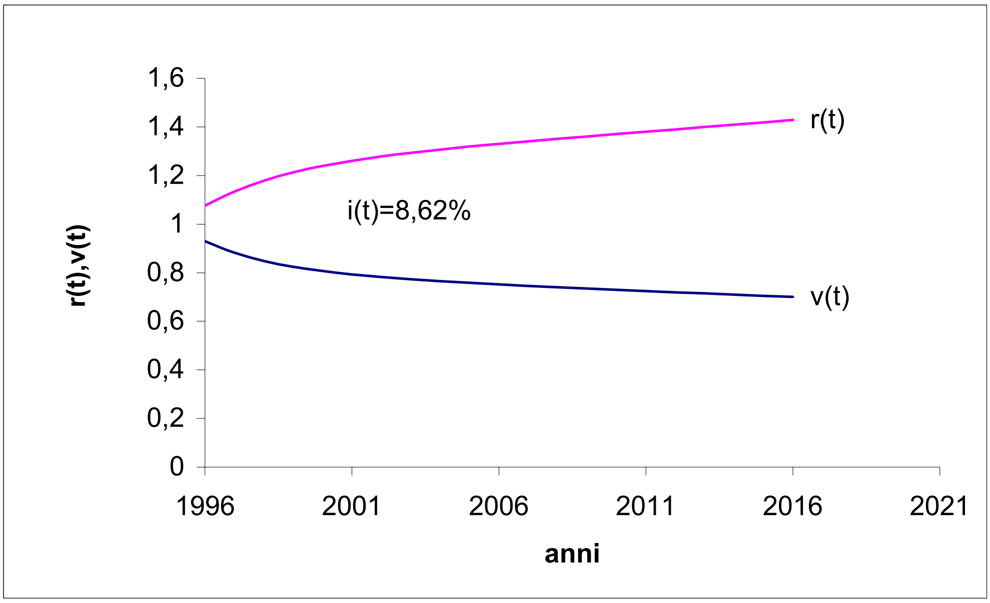

Figura 9: *v(i(t),k,t) e r(i(t),k,t) nel modello CIR*

Per calcolare la *duration* della passività del Fondo, definiamo innanzitutto il valore della passività complessiva del Fondo, L_k .

La passività complessiva è data dalla somma delle riserve già accumulate e degli oneri futuri del Fondo individuati dalla riserva matematica complessiva V_k .

All'epoca k =31/12/02, sulla scorta della struttura dei tassi individuata ,si ha:

$$\tilde{V}_{31/12/2002} = 657.336.455,1€$$

Dall'analisi dei bilanci del Fondo relativi agli esercizi 1998, 1999, 2000, 2001 e 2002 risulta che l'ammontare delle riserve già accumulate fino all'epoca k=31/12/02, ammonta ad 272.300.189,00€ ; pertanto, in base alla [41], la passività complessiva del fondo $L_{31/12/02}$ risulta essere pari a 929.636.644,1€.

Infine la *duration* stocastica, per la [63], è:

$$D(k,L_k) = \left[B^{-1} \left[\frac{\sum_{t=k}^{N-1} B(t-k) x_t(t) v(k,t) + \sum_{t=k}^{N-1} B(t-k) y_t(t) v(k,t)}{\widetilde{L}_k} \right] - t \right] = 0{,}69045$$

Un confronto con i risultati raggiunti nel § 5.4 sono riportati in Tabella 3.

k	Duration Macaulay (anni)	Duration stocastica (anni)
31/12/2002	0,951000374	0,690452256

Tabella 3: *confronto tra duration deterministica e duration stocastica*

Anche in tal caso la *duration* assume valori inferiori all'unità. In effetti ciò che abbiamo implicitamente assunto è che i pagamenti futuri per il Fondo Pensione siano calcolati con una probabilità che potremo definire "esatta" in quanto riflette l'effettiva evoluzione della popolazione dello stesso. In altri termini, i pagamenti futuri per il Fondo sono sempre allineati con la propria composizione ad ogni singola epoca e come tale non creano rigidità, a differenza di ciò che accade per i pagamenti in corso del Fondo che risentiranno del disallineamento tra la probabilità che ha determinato tali pagamenti e le nuove probabilità stimate. Per questo possiamo affermare che la *duration* della v.a. passività complessiva tiene conto solo dell'effetto rigidità ed è pari alla durata del flusso "rigido" cioè quella dei pagamenti in corso per il Fondo Pensione[33].

[33] Si vedano in proposito Yawitz, Kaufold, Macirowski, Smirlock, "*The Pricing and Duration of Floating Rate Bonds",* Journal of Portfolio Management, estate 1987 e Caparrelli F., *Economia del mercato mobiliare,* Ed. McGraw-Hill.

CAPITOLO II

L'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA PER UN PORTAFOGLIO COMPOSTO DA UN MIX DI ATTIVI

2. UN NUOVO MODELLO PER LA MISURA DELLA RISCHIOSITA' DEI TITOLI AZIONARI

Abbiamo fino a questo punto ipotizzato che il Fondo possa investire le proprie attività ricorrendo esclusivamente a titoli privi di rischio. Sappiamo però che la realtà operativa è differente, nel senso che gli investitori generalmente compongono il loro portafogli ricorrendo ad un mix di attività cercando di bilanciare tutti i rischi connessi a tali politiche d'investimento.
Ci proporremo in questo caso di estendere una misura di rischio tradizionale quale la *duration* che individua la sensibilità del prezzo di un titolo rispetto alle variazioni dei tassi di interesse, ai titoli azionari. In effetti, i gestori dei Fondi, tipicamente usano la *duration* nei loro schemi d'investimento come un metodo di *matching* tra le proprie passività note a priori e le proprie attività derivanti dai rendimenti prodotti dagli investimenti delle riserve e del capitale proprio a loro disposizione. La costruzione di misure di rischio quali la *duration* e la definizione di tecniche di immunizzazione che si fondano sulla stessa, sono piuttosto diffuse con riferimento ai titoli a reddito fisso, meno presente in letteratura invece è l'analisi di tali strumenti relativamente ai titoli azionari. Una prima formulazione della rischiosità di un titolo azionario è rinvenibile all'interno del *Dividend Discount Model* (DDM) di Gordon[34] così individuata:

$$D_{DDM} = \frac{1}{k-g} \qquad [64]$$

dove k è il tasso nominale di sconto del titolo azionario e g il tasso di crescita dei dividendi.

[34] Si veda in proposito Gordon, M. J., 1962, *The Investment, Financing, and Valuation of the Corporation*, Homewood Irwin.

Tale metodologia è stata però piuttosto criticata poiché fornisce stime estremamente lunghe di *duration* relativamente ai titoli azionari e perché, di fatto, manca di considerazioni pratiche maggiormente individuabili nell'assunzione che il tasso di crescita del dividendo sia modellabile come un'infinita progressione geometrica.

Successivamente, accanto a quanto proposto all'interno del DDM, furono messi a punto altri modelli per il calcolo della *duration* di un titolo azionario. Riportiamo, a titolo esemplificativo, il modello proposto da Leibowitz[35] che si basa sulle correlazioni storiche osservabili tra azioni ed obbligazioni. Più in dettaglio, in relazione all'atteggiamento tipico delle decisioni di *asset allocation* dei gestori dei fondi di orientare in modo prevalente le loro decisioni su azioni ed obbligazioni, il beta della componente azionaria di ogni dato portafoglio può essere utilizzato per ottenere una misura della *duration* dello stesso che potrà essere d'aiuto nella definizione del perfetto *matching* tra attività e passività. In particolare, risulta:

$$D_E = \left(\frac{\sigma_E}{\sigma_B} \right) \rho(E,B) D_B \quad , \qquad [65]$$

con:

$D_B =$ *duration* del mercato obbligazionario;

$D_E =$ *duration* stimata del mercato azionario;

$\sigma_B =$ deviazione standard dei rendimenti del mercato obbligazionario;

$\sigma_E =$ deviazione standard dei rendimenti del mercato azionario;

$\rho(E,B) =$ correlazione tra rendimenti del mercato azionario e quello obbligazionario.

Intendiamo ora definire una misura di rischio per i titoli azionari sfruttando quanto già prodotto da Macauley[36] in relazione ai titoli obbligazionari rifacendoci al

---

[35] Si veda in proposito Leibowitz M. L., 1986, *Total Portfolio : A New Perspective on Asset Allocation,* Financial Analysts Journal, Vol. 42, n. 5.

[36] Macaulay F.,1938, *Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yields and stock prices in the U.S. since 1856,* New York, National Bureau of Economic Research

lavoro di Dechow, Sloan e Soliman[37] per ciò che riguarda la formulazione del modello, e ad un lavoro da noi elaborato, invece, per la procedura da seguire nella stima dei futuri *cash flow* dei titoli azionari.

2.1 DALLA *DURATION* DI MACAULEY AD UN NUOVO MODELLO PER I TITOLI AZIONARI

Tradizionalmente la misura di *duration* prodotta da Macauley in relazione ai titoli obbligazionari risulta:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} t \times (CF_t /(1+i)^t)}{P} \quad , \qquad [66]$$

con:

CF_t = *cash flow* del titolo all'epoca t;

i = tasso di attualizzazione;

P = prezzo del titolo.

Quindi la *duration* altro non è che la media aritmetica ponderata delle scadenze, con pesi pari ai valori attuali dei flussi considerati.
Il ruolo principale della *duration,* nell'analisi dei titoli a reddito fisso, è quello di fornire una misura della sensibilità del prezzo del titolo rispetto alle variazioni dei tassi d'interesse. Differenziando la [66] rispetto al tasso, si ha:

$$\frac{\partial P}{\partial i} = -P \times \frac{D}{1+i} \quad . \qquad [67]$$

Quanto individuato nella [67] indica che la relazione tra il cambiamento del prezzo del titolo e il cambiamento del tasso d'interesse è in funzione di D, vale a dire:

[37] Si veda in proposito Dechow, Sloan, Soliman, 2004, *Implied Equity : A New Measure of Equity Risk,* Review of Accounting Studies, n. 9, pp. 197-228

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{D}{1+i}\Delta i \quad . \qquad [68]$$

Nella [68], l'espressione $D/(1+i)$ è comunemente definita *duration* modificata e fornisce una semplice misura della sensibilità del prezzo del titolo ai cambiamenti nei tassi d'interesse.

Vediamo ora come tale modello possa essere impiegato allorquando si considera un'altra tipologia di titoli quali quelli azionari.

L' estensione del concetto di *duration* alle azioni, ci porta ad affrontare un duplice problema:

- per com'è strutturata, un'obbligazione prevede una serie di pagamenti nel tempo di durata prestabilita, mentre i *cash flow* che scaturiscono da un'azione potrebbero essere potenzialmente illimitati;
- l'ammontare e l'epoca di pagamento dei *cash flow* per le obbligazioni sono di solito specificati a priori e soggetti ad una piccola incertezza; i flussi che derivano da un'azione, invece, non sono definiti in anticipo e sono molto incerti essendo comunque correlati oltre che alle caratteristiche generali del mercato, anche ai risultati di gestione conseguiti dall'azienda della quale vanno a rappresentare il capitale sociale.

In relazione al primo problema Dechow, Sloan e Soliman dividono la formula della *duration* individuata dalla [66] in due parti: la prima è riferita ad un orizzonte temporale di previsione di ampiezza finita *T*, mentre la seconda, che definiscono "terminale", è relativa ad un orizzonte temporale illimitato. Più in dettaglio, si ha:

$$D=\frac{\sum_{t=1}^{T} t\times CF_t\,/(1+i)^t}{\sum_{t=1}^{N} CF_t\,/(1+i)^t}\times\frac{\sum_{t=1}^{T} CF_t\,/(1+i)^t}{P}+$$

$$+\frac{\sum_{t=T+1}^{\infty} t\times CF_t\,/(1+i)^t}{\sum_{t=T+1}^{\infty} CF_t\,/(1+i)^t}\times\frac{\sum_{t=T+1}^{\infty} CF_t\,/(1+i)^t}{P} \qquad [69]$$

Poiché stiamo definendo tale formula relativamente a titoli azionari, sarà:

P = capitalizzazione del mercato del titolo ottenuta come il prodotto tra il prezzo dell'azione *i-esima* e il numero di azioni emesse;
CF = *cash flow* distribuiti agli azionisti;
i = tasso di rendimento atteso delle azioni.

La [69] definisce quindi la *duration* di un'azione come la somma ponderata della *duration* relativa ai *cash flow* dell'orizzonte temporale finito T e della *duration* degli infiniti flussi dell'espressione terminale.
Altra assunzione fatta dagli autori è che i *cash flow* terminali possono essere considerati distribuiti in perpetuo con un valore pari alla differenza tra la capitalizzazione del mercato implicita nel prezzo dell'azione ed il valore ad oggi dei flussi relativi all'orizzonte temporale di previsione finito, cioè:

$$\sum_{t=T+1}^{\infty}\frac{CF_t}{(1+i)^t}=\left(P-\sum_{t=1}^{T}\frac{CF_t}{(1+i)^t}\right) \quad . \qquad [70]$$

Ricordando ora che la *duration* di una rendita perpetua che inizia dopo T periodi è:

$$D = T + \frac{1+i}{i} \quad , \qquad [71]$$

sostituendo la [70] nella [69] l'espressione della *duration* per un'azione diviene:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} t \times CF_t /(1+i)^t}{P} + \left(T + \frac{1+i}{i} \right) \times \frac{\left(P - \sum_{t=1}^{T} CF_t /(1+i)^t \right)}{P} \quad . \qquad [72]$$

Con riferimento ai *cash flow* terminali, l'assunzione che gli stessi siano realizzati come un livello di perpetuità è poco usuale in letteratura; in effetti, più comunemente si assume che essi crescano ad un costante tasso terminale pari al tasso atteso di crescita a livello macroeconomico. Tuttavia gli autori fanno tale ipotesi senza perdere in termini di generalità. Infatti essi affermano che, purché l'orizzonte temporale di previsione sia abbastanza lungo da esaurire tutte le opportunità di una crescita "super-normale" o "sub-normale" dell'azienda, il tasso terminale di crescita risulterà essere costante nei diversi periodi cosicché non sarà un' importante fonte di variazione nel valore ad oggi del titolo azionario. Inoltre, proprio perché i *cash flow* terminali o perpetui sono calcolati partendo dal prezzo dell'azione osservato sul mercato, possiamo dire che tale valore ad oggi del titolo azionario sia basato principalmente sulle aspettative degli investitori riflesse nel prezzo del titolo piuttosto che su previsioni razionali dei futuri *cash flow*[38].
Tali considerazioni consentono dunque di superare il primo problema che si presenta quando adattiamo una misura della rischiosità di titoli tipicamente a reddito fisso quale la *duration* ai titoli azionari. Il secondo ostacolo che dobbiamo ora affrontare affinché la [72] possa trovare pratica applicazione è individuare una metodologia che ci consenta di prevedere quali siano i possibili *cash flow* che possano scaturire dal titolo azionario nell'orizzonte temporale di ampiezza finita*T*.
A tale proposito sfrutteremo un modello di previsione da noi messo a punto e che trova fondamento nella teoria delle opzioni.

[38] Si veda in proposito Dechow P., Sloan R., Soliman M., *"Implied Equity: A New Measure of Equity Risk"* ,2004, Review of Accounting Studies, n. 9, pp. 197-228

2.2 I TITOLI AZIONARI

L'azione[39] è l'unità minima in cui si suddivide il capitale sociale di un'azienda e come tale è un titolo di partecipazione che conferisce al titolare la qualifica di socio. La caratteristica fondamentale di tali titoli rischiosi è che hanno una remunerazione eventuale (il dividendo) legato strettamente ai risultati aziendali ed alla decisione dell'assemblea dei soci di distribuire in tutto o in parte gli utili conseguiti. Più in particolare spetterà all'assemblea dei soci definire la totale o parziale distribuzione degli stessi ai possessori dei titoli azionari; infatti, non tutto l'utile conseguito è disponibile per la distribuzione ai soci, poiché il riparto degli utili di bilancio deve effettuarsi nel rispetto delle norme di legge e delle disposizioni contenute nell'Atto Costitutivo o nello Statuto. Per quanto riguarda le prime, l'art. 2428 del Codice Civile stabilisce che dagli utili netti annuali deve essere dedotta una somma corrispondente almeno al 5% degli stessi per la costituzione di una riserva legale, sino a che questa non abbia raggiunto il 20% del capitale sociale. Inoltre, anche nell'Atto Costitutivo (ma più spesso nello Statuto), possono essere inserite delle clausole che prevedono l'accantonamento a riserva degli utili conseguiti, così come gli amministratori possono poi, nel corso di esercizi con utili particolarmente elevati, proporre l'accantonamento degli stessi in una riserva definita "straordinaria". Vanno poi dedotti dagli utili conseguiti i compensi per gli amministratori e solo a questo punto si può procedere alla ripartizione degli utili sotto forma di dividendo.

2.2.1 LE OPZIONI BINARIE

In virtù dei vincoli sopra elencati possiamo dedurre che l'utile sia attribuito ai vari azionisti se e solo se il proprio ammontare superi una soglia di riferimento espressamente stabilita all'interno dell'azienda al di sotto della quale non si ha invece alcuna ripartizione. Possiamo dunque configurare la posizione del *buyer* di un'azione simile a quella del detentore di un' opzione binaria *asset or nothing* di

[39] Si veda in proposito il Codice Civile, Libro V, Del Lavoro, Capo V, Della Società Per Azioni, art. 2325 e successivi.

tipo americano che abbia come sottostante l'utile aziendale e che a scadenza assicuri una somma S_T purché il valore del sottostante superi una determinata barriera *B*.

Prima di procedere ad una descrizione del modello che proporremo per la valutazione dei *cash flow* dei titoli azionari, facciamo alcuni richiami alle opzioni binarie. Le opzioni binarie sono opzioni esotiche del tipo *path dependent* in quanto il loro valore è condizionato dalla dinamica del prezzo del sottostante durante la vita dell'opzione e non solo alla data di scadenza. La famiglia delle opzioni binarie è molto vasta, il modo più semplice di procedere ad una loro classificazione è quello di considerare opzioni *all or nothing* di tipo europeo o di tipo americano. Le prime sono esercitabili solo a scadenza e prevedono il pagamento di *K* unità monetarie se $S_T > X$ (prezzo di esercizio). Le seconde invece, sono esercitabili per ogni $\tau \in [0,T)$ e prevedono il pagamento di *K* unità monetarie se il prezzo del sottostante supera il valore della barriera *B*. Tale tipo di opzione è definita *one touch*. Caratteristica di tali opzioni è dunque il pagamento di una somma fissa *K* indipendente dal valore intrinseco dell'opzione a scadenza. Una variante delle opzioni *all or nothing* è la tipologia di opzioni *asset or nothing* sia di tipo europeo che americano che prevede il pagamento della somma S_T in luogo della somma fissa *K*. Nel nostro lavoro ci soffermeremo a considerare quest'ultima categoria di opzioni di tipo americano il cui pay off a scadenza è rappresentato dalla:

$$C_{asset} = \begin{cases} 0 & se\, S_T \leq B \\ S_T & se\;\; S_T > B \end{cases}$$

ovvero l'opzione inizierà a "vivere", (dunque, ad acquistare valore) solo nel momento in cui il sottostante supererà il livello della barriera *B*. Per come sono strutturate le opzioni di questo tipo sono dunque assimilabili alle opzioni barriera, con la differenza che a scadenza si riceverà la somma S_T anziché la differenza tra il prezzo del sottostante ed il prezzo di esercizio. In particolare, nell'ambito delle opzioni con barriera, possiamo affermare che l'opzione *asset or nothing* di tipo americano è configurabile come un'opzione barriera del tipo *up and in call* in cui l'opzione di fatto è attivata solo se il prezzo del sottostante supera il livello della barriera B; il pay off a scadenza dell' opzione è:

$$C_{up\ and\ in\ call} = max\left[S_T - X,\ 0\ \middle|S_T > B;\ 0\ \middle|S_T \leq B\right]\ . \qquad [73]$$

Si deve inoltre ricordare che tali tipi di opzione appartengono alla categoria delle "reverse barrier" cioè sono caratterizzate dal fatto che la barriera si trova nella regione in the money ed ha un valore maggiore del prezzo di esercizio X.

2.3 IL MODELLO PROPOSTO

Le ipotesi alla base del modello proposto sono le seguenti:

1. gli investitori sono indifferenti al rischio;
2. non vi sono opportunità di arbitraggio ed i mercati sono efficienti;
3. non vi sono costi di transazione, né imposte;
4. esiste ed è noto e costante un unico tasso risk free i per tutto l'intervallo di osservazione *(0, T);*
5. la dinamica dei prezzi del sottostante è spiegata da una distribuzione binomiale.
6.

Inoltre, ai fini della descrizione del modello dovremo fare ulteriori specifiche:

a) La somma ricevuta a scadenza è pari a:

$$S_T = d_T = \frac{U_T}{G}\ , \qquad [74]$$

con:

$d_T =$ dividendo unitario da distribuire all'epoca T per ogni azione;

$U_T =$ utile realizzato dall'azienda a scadenza;

$G =$ numero di azioni in cui è suddiviso il capitale sociale;

b) L'ammontare ricevuto dall'azionista è:

$$D_T = d_T * g \qquad [75]$$

con :

$g =$ numero di azioni possedute dall'azionista

c) La barriera non è fissa, ad un livello *B,* ma variabile, in quanto il valore della stessa tenderà progressivamente a variare in relazione agli utili conseguiti dall'azienda nel corso del tempo. In particolare, abbiamo detto che il livello della barriera sarà per l'azienda fissato come quella percentuale degli utili d'impresa necessaria a coprire gli accantonamenti obbligatori e facoltativi in sede di riparto utili, quali quelli per le varie riserve nonché per il compenso pattuito agli amministratori. E' evidente dunque come tale ammontare sia variabile in relazione agli utili conseguiti. In particolare, definiremo nel nostro caso una barriera mobile del tipo:

$$H = Be^{\delta\tau} \ , \qquad \text{con} \qquad (B < S_0 = U, \ 0 \le \tau \le T), \qquad [76]$$

in cui ipotizzeremo in pratica una crescita esponenziale della stessa rispetto al tempo con:

$B =$ valore fisso della barriera valutata all'epoca iniziale come l'ammontare di utile prodotto necessaria alla copertura delle varie spese emerse in sede di riparto dello stesso;

$\delta =$ rendimento medio degli utili storici.

2.3.1 IL MODELLO BINOMIALE CON BARRIERA MOBILE

Vediamo ora come si modifica il modello binomiale proposto da CRR[40] che in presenza di una barriera mobile definiremo esteso. A tale proposito faremo

[40] Cox, Ross, Rubinstein, 1979, *"Option pricing: a Simplified Approach*, 1979, Journal of Financial Economics, n.7, pp. 229-263.

riferimento al modello proposto da M. Costabile[41] riferito ad opzioni *call down-and-out* di tipo europeo che modificheremo adeguatamente per tener conto della tipologia di opzioni da noi considerata cioè opzioni binarie *call* del tipo *one touch*. Più dettagliatamente stabiliamo quanto segue:

- abbandoniamo l'ipotesi del modello binomiale CRR per cui $ud = 1$; questo allo scopo di costruire un albero binomiale con un insieme di nodi che rispecchiano l'evoluzione della barriera;
- definiamo l'ampiezza degli *step* verso il basso come:

$$d = e^{(\delta t - \sigma \sqrt{t})} \qquad [77]$$

- ai fini del calcolo del valore del sottostante selezioniamo un numero di *step* verso il basso *m*, tale per cui dall'epoca iniziale dopo *m* movimenti verso il basso, il valore del sottostante raggiunga esattamente la barriera;
- fissiamo la dimensione dei movimenti verso l'alto in modo che l'intero insieme dei nodi dell'albero segua la barriera.

Di conseguenza il valore del sottostante, nel nostro caso l'utile aziendale all'epoca iniziale *(U),* toccherà la barriera dopo *m* passi verso il basso se si verifica:

$$Ud^m = Be^{m\delta t} \qquad [78]$$

ovvero, per la [76], se:

$$Ue^{m(\delta t - \sigma\sqrt{t})} = Be^{m\delta t} \quad . \qquad [79]$$

[41] M. Costabile, 2002, *"Extending the Cox-Ross-Rubinstein algorithm for pricing option with exponential boundaries"*, Proceedings of ALGORITMY, Conference on Scientific Computing, pp. 23-32

Ricordiamo ora dal modello binomiale CRR che:

$$t = \frac{T}{n} \tag{80}$$

rappresenta l'ampiezza dell'intervallo temporale tra due successivi passi con n numero di intervalli temporali usati nel calcolo del valore del sottostante. Sostituendo ora la [80] nella [79] e risolvendo rispetto a n otteniamo:

$$n = \frac{m^2 \sigma^2 T}{ln^2(B/U)}. \tag{81}$$

Secondo quanto detto, quindi, se costruiamo un albero binomiale con un numero di intervalli temporali n, dopo m movimenti verso il basso partendo dall'epoca iniziale, il valore del sottostante raggiungerà esattamente la barriera esponenziale. Il problema è che n in genere non sarà un numero intero, per questo considereremo un numero di *step* tali per cui:

$$n^* = [n] \tag{82}$$

dove $[n]$ è la parte intera di n.

La scelta di n^* così effettuata garantisce che esista un nodo dell'albero vicino ma appena oltre la barriera. Al fine di definire un intero insieme di nodi che seguano l'evoluzione della barriera è sufficiente imporre che un movimento verso l'alto, seguito da un movimento verso il basso, darà origine allo stesso incremento del valore della barriera lungo un intervallo temporale di ampiezza $2t$. Questo avviene scegliendo un'ampiezza dello *step* pari a:

$$ud = e^{2\delta t}, \tag{83}$$

con:

$$u = e^{\delta t + \sigma\sqrt{t}} \quad . \qquad [84]$$

Le probabilità di transizione che sono utilizzate nel calcolo del valore del sottostante sono le probabilità neutrali al rischio[42]. In particolare la probabilità di un movimento verso l'alto sarà:

$$p = \frac{e^{rt} - d}{u - d} \quad , \qquad [85]$$

conseguentemente la probabilità di un movimento verso il basso sarà:

$$q = 1 - p \quad . \qquad [86]$$

2.3.2 L'ALGORITMO DEL MODELLO BINOMIALE ESTESO PER IL PREZZO DELLA *BINARY OPTION* CON BARRIERA MOBILE

Si vuole modificare ora in modo adeguato l'algoritmo di calcolo del modello binomiale per tener conto della presenza di una barriera mobile. Il tipo di opzione da noi considerata è un'opzione binaria call *asset or nothing* di tipo americano che abbiamo detto nasce nel momento in cui il sottostante, l'utile aziendale, supera la barriera mobile nel nostro caso individuata dagli accantonamenti obbligatori e facoltativi che l'impresa deve fare in sede di riparto degli utili. Al fine di definire una formula chiusa per il *pricin*g di questo tipo di opzioni sarà dunque necessario calcolare il numero di traiettorie che non toccano la barriera esponenziale per le quali l'opzione esiste. A tale scopo faremo riferimento al principio di riflessione di Desirè Andrè[43]. Tale principio altro non è che un metodo di calcolo che consente di definire, in presenza di passeggiate aleatorie con barriera assorbente, il numero di traiettorie di una particella che, dopo un certo numero di passi, non

[42] Si veda in proposito Caparrelli F., 2001, *I Derivati*, Ed. McGraw-Hill, Cap. 5.
[43] Si veda in proposito Feller, 1968, *An Introduction to Probability Theory and its Application:Volume 1,* Academic Press.

toccano la barriera. Il modello che presenteremo ha la stessa struttura perché considera una particella che si muove in un albero binomiale con un insieme di nodi che seguono la dinamica della barriera. Come conseguenza, in questo contesto, il principio di riflessione può essere utilizzato per determinare il numero di traiettorie per una particella che arrivi alla fine di ogni nodo dell'albero senza toccare la barriera esponenziale.

Sia in proposito $N_{n^*,j}$ il numero di traiettorie dell'attività sottostante con *j* passi verso l'alto ed *(n*-j)* passi verso il basso; il numero di tali traiettorie è dato dal coefficiente binomiale $\binom{n^*}{j}$. Sia poi $N^t_{n^*,j}$ il numero di traiettorie con *j* movimenti verso l'alto e *(n*-j)* verso il basso che toccano o attraversano la barriera. Sia infine *m* il numero di successivi passi verso il basso, per i quali partendo dall'epoca iniziale il valore dell'attività sottostante abbia toccato o attraversato la barriera. Applicando il principio di riflessione si ha:

$$N^t_{n^*,j} = \binom{n^*}{j+m} . \qquad [87]$$

Di conseguenza, il numero di traiettorie con *j* movimenti verso l'alto e *(n*-j)* movimenti verso il basso che non toccano o non attraversano la barriera è:

$$N^{nt}_{n^*,j} = \binom{n^*}{j} - \binom{n^*}{j+m}. \qquad [88]$$

Utilizzando infine la [88] siamo in grado di pervenire ad una formula chiusa per il *pricing* della nostra opzione (il valore ad oggi dei futuri *cash flow* di un titolo azionario *i-esimo*) con barriera esponenziale come:

$$A = V_{i,0} = e^{-rT}\left[\sum_{j=0}^{n^*} N^{n,t}_{n^*,j}\, p^j q^{n-j}\, max(0, S_T)\right]. \qquad [89]$$

Inserendo ora il risultato individuato dalla [89] all'interno della [72] otteniamo la *duration* per i titoli azionari :

$$D = \frac{\sum_{s=0}^{n^*} t \times s \times e^{-rts} \left[\sum_{j=0}^{n^*} N_{n^*,j}^{n,t} p^j q^{n-j} \, max\left(0, S_T\right) \right]}{P} + \qquad [90]$$

$$+ \left(T + \frac{1+i}{i} \right) \times \frac{\left(P - e^{-rT} \left[\sum_{j=0}^{n^*} N_{n^*,j}^{n,t} p^j q^{n-j} \, max\left(0, S_T\right) \right] \right)}{P}$$

avendo posto:

$$\left(P - \sum_{t=1}^{T} CF_t \, /(1+i)^t \right) = \left(P - e^{-rT} \left[\sum_{j=0}^{n^*} N_{n^*,j}^{n,t} p^j q^{n-j} \, max\left(0, S_T\right) \right] \right) \qquad [91]$$

e

$$\sum_{t=1}^{T} t \times CF_t \, /(1+i)^t = \sum_{s=0}^{n^*} t \times s \times e^{-rts} \left[\sum_{j=0}^{n^*} N_{n^*,j}^{n,t} p^j q^{n-j} \, max\left(0, S_T\right) \right], \qquad [92]$$

con t che nella [92] rappresenta l'ampiezza dell'intervallo temporale tra due successivi passi.

2.4 LA TEORIA DELL' IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA PER UN PORTAFOGLIO COMPOSTO DA UN MIX DI ATTIVI

Il nostro obiettivo sarà ora quello di riformulare opportunamente il teorema dell'immunizzazione stocastica e le conseguenti strategie di selezione di portafogli istantaneamente non rischiosi, quando il Fondo componga il proprio portafoglio con un mix di attivi; nello specifico, considereremo il caso in cui tali attivi siano costituiti da azioni ed obbligazioni.

Nella definizione della propria strategia d'investimento il Fondo stabilisce a priori la percentuale con cui le varie classi di attivi saranno presenti in portafoglio, il cosiddetto rapporto di composizione, che di fatto va a delineare l'atteggiamento nei confronti del rischio da parte del Fondo nel senso di una maggiore o minore propensione verso lo stesso all'interno della politica di *asset allocation* che l'investitore intenderà praticamente perseguire.

Limitiamoci a considerare il teorema di immunizzazione stocastica relativamente alla politica di selezione di un portafoglio a minimo costo.

In presenza di un portafoglio composto da azioni ed obbligazioni il problema di selezione del portafoglio si modificherà nel seguente modo.

Ferma restando la funzione obiettivo, si tratterà sempre di scegliere tra le varie opportunità d'investimento esistenti sul mercato, le aliquote ottime di composizione che minimizzano il costo del portafoglio che si vuole costituire. A tale fine si dovranno cambiare in modo opportuno i vincoli del problema di ottimizzazione in virtù delle informazioni disponibili a priori.

In particolare, il vincolo di bilancio sarà modificato in forza del rapporto di composizione. Riprendiamo la [30.1], vale a dire:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{m} b_k v(t,t_k) \ .$$

Ipotizziamo di sapere le percentuali con cui obbligazioni e azioni comporranno il portafoglio di attivi che indicheremo, rispettivamente, con Γ_1 e Γ_2 . Da queste informazioni deduciamo che solo una percentuale pari a Γ_1 della passività complessiva sarà coperta da obbligazioni, mentre una percentuale pari a Γ_2 sarà coperta ricorrendo all'acquisto delle azioni. Per quanto detto il nuovo vincolo di bilancio sarà:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k v(t,t_k) = \Gamma_1 \cdot \sum_{k=1}^{m} b_k v(t,t_k) \quad [93]$$

Relativamente al vincolo sulle *duration* si tratterà principalmente di stabilire la *duration* complessiva della componente azionaria del portafoglio di attivi. A tal proposito nel modello da noi rielaborato, risulta essere ininfluente la modalità di calcolo con cui si perviene a tale misura di rischio; la *duration* potrà quindi essere calcolata o con il metodo descritto all'interno di questo stesso lavoro o con uno degli altri metodi presenti in letteratura, essendo comunque interessati a conoscere esclusivamente il valore numerico della stessa al fine di definirne il peso in termini percentuali rispetto alla *duration* complessiva della passività totale del Fondo nota a priori. Riprendiamo la [30.2], essa è:

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi(t-t_k) a_k v(t,t_k) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(t-t_k) b_k v(t,t_k) .$$

Supponiamo dunque nota a priori la politica d'investimento seguita dal Fondo per i titoli azionari, per cui relativamente agli stessi si conosce l'ammontare complessivo del patrimonio investito in questi titoli e la *duration* relativa al portafoglio di azioni così costituito. A questo punto, per il teorema dell'immunizzazione stocastica, sappiamo che la *duration* della passività totale nota a priori deve essere pari alla *duration* del portafoglio di attivi, quest'ultima ottenuta ora come una ponderazione tra la rischiosità attribuibile alla componente azionaria e quella attribuibile alla componente obbligazionaria.

Definiamo D_2 la *duration* della componente azionaria e D_L la *duration* della passività complessiva del Fondo. Da queste due grandezze siamo in grado di definire il peso che la rischiosità dei titoli azionari ha sulla rischiosità della passività complessiva, cioè:

$$\frac{D_2}{D_L} = \theta_{2L} \quad . \qquad [94]$$

Affinché la *duration* degli attivi sia esattamente uguale alla *duration* della passività dovrà risultare che:

$$\theta_{2L} D_L + (1 - \theta_{2L}) D_L = D_L \quad , \qquad [95]$$

dove $(1 - \theta_{2L}) = \theta_{1L}$ è il peso della rischiosità della componente obbligazionaria sulla rischiosità della passività complessiva.

Con semplici passaggi, dalla [95] si dimostra che:

$$\begin{aligned} D_1 &= (1 - \theta_{2L}) D_L \\ D_1 &= \theta_{1L} D_L \end{aligned} \qquad [96]$$

Pertanto, riformulando il vincolo sulle *duration* sulla base delle considerazioni fin qui svolte, questo diviene:

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi(t - t_k) a_k v(t, t_k) = \theta_{1L} \cdot \sum_{k=1}^{m} \varphi(t - t_k) b_k v(t, t_k) \ . \qquad [97]$$

A questo punto il problema di selezione di un portafoglio a minimo costo sarà sempre un problema di programmazione lineare, però con i vincoli modificati del tipo:

$$\min \ Z(t) = \min \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \quad , \qquad [98]$$

soggetto ai vincoli:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k v(t,t_k) = \Gamma_1 \cdot \sum_{k=1}^{m} b_k v(t,t_k), \qquad [98.1]$$

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi(t-t_k) a_k v(t,t_k) = \theta_{1L} \cdot \sum_{k=1}^{m} \varphi(t-t_k) b_k v(t,t_k), \qquad [98.2]$$

$$\alpha_i \geq 0 \qquad i = 1,2,......, n \; . \qquad [98.3]$$

A tal proposito faremo questo esempio. Ipotizziamo il caso piuttosto semplificato che il Fondo voglia coprire una passività nota a priori di € 1000 scadente tra 3 anni. In particolare, vorrà coprire tale passività selezionando un portafoglio a minimo costo scegliendo tra le varie opportunità d'investimento esistenti sul mercato costituite esclusivamente da titoli privi di rischio. Ipotizziamo che l'insieme delle opportunità sia rappresentato da questa matrice:

$$A = \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 105 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 108 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 107 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right.$$

Si disponga inoltre delle queste informazioni aggiuntive riportate in Tabella 4:

Tir	*Prezzo*	*Quotazioni*
6,00%	*€ 101,89*	*€ 102,00*
4,00%	*€ 158,06*	*€ 159,98*
5,50%	*€ 99,16*	*€ 99,30*
6,50%	*€ 113,37*	*€ 113,35*
4,80%	*€ 112,10*	*€ 112,81*

Tabella 4

Il problema di selezione del portafoglio a minimo costo sarà così formulato:

$$min \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \quad ,$$

soggetto ai vincoli:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i = \eta_0 \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vartheta_i = \vartheta_0 \quad ,$$

$$\alpha_i \geq 0 \, , \qquad\qquad i = 1,2,\ldots.., \;\; n.$$

avendo posto:

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} v(0, t_k),$$

$$\vartheta_i = \sum_{k=1}^{m} \varphi(t_k) a_{ik} v(0, t_k),$$

per $i=1,2,\ldots n$ e:

$$\eta_0 = Lv(0, H),$$

$$\eta_0 = \varphi(H) Lv(0, H).$$

Applicando tali formule in ipotesi di struttura per scadenza dei tassi d’interesse descritta dal modello CIR utilizzando i parametri già individuati al §6.1 otteniamo il portafoglio selezionato α con quote $\alpha_1 = 3{,}5791$, $\alpha_3 = 4{,}2052$, $\alpha_i = 0$ per $i=2,4,5$ con un costo complessivo di *C'= € 782,65* e con una *duration* pari a quella della passività complessiva *(D_L=3)* per ipotesi.

Ipotizziamo ora che il Fondo voglia comporre il proprio portafoglio non solo con titoli privi di rischio ma anche con azioni. A tal proposito supponiamo che il portafoglio di attivi si componga per il *60%* di titoli obbligazionari e per il *40%* di titoli azionari; inoltre sappiamo che la *duration* della componente azionaria del portafoglio di attivi che si vuole comporre è pari a *1,3*.

Ciò che riusciamo a stabilire con queste informazioni è che $\Gamma_1 = 60\%$ ed inoltre che il peso della *duration* della componente azionaria sulla *duration* della passività totale è pari a $\theta_{2L} = 43{,}33\%$ da cui $\theta_{1L} = 56{,}67\%$.

Il problema di selezione del portafoglio a minimo costo diventerà ora:

$$min \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \quad ,$$

soggetto ai vincoli:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i = \Gamma_1 \eta_0 \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vartheta_i = \theta_{1L} \vartheta_0 \quad ,$$

$$\alpha_i \geq 0, \qquad\qquad i = 1,2,\ldots\ldots, \; n.$$

In questo caso risulterà selezionato il portafoglio di titoli obbligazionari α con quote $\alpha_1 = 2{,}5080$, $\alpha_3 = 2{,}2480$, $\alpha_i = 0$ per $i=2,4,5$ con un costo complessivo di *C'= € 479,05* e costituito in modo tale per cui la *duration* complessiva del portafoglio di attivi sia di fatto pari a quella della passività totale

(D_L=3) per ipotesi. Riassumiamo nella Tabella 5 i risultati raggiunti nelle due ipotesi:

	Strategia di selezione di un ptf a minimo costo con solo titoli obbligazionari	*Strategia di selezione di un ptf a minimo costo con titoli obbligazionari e azionari*	*Variazione percentuale*
α_1	*3,5791*	*2,5080*	*-29,92%*
α_3	*4,2052*	*2,2480*	*-46,54%*

Tabella 5: *aliquote ottime di composizione del ptf di attivi del Fondo Pensione*

Quello che è importante notare è come l'introduzione dei titoli azionari non comporti in questo caso una modifica delle tipologie dei titoli privi di rischio da selezionare agendo esclusivamente sulla quantità con cui tali titoli sono presenti in portafoglio. Infatti, nel caso in cui il portafoglio di attivi si compone esclusivamente di titoli obbligazionari, si andranno a scegliere dalle opportunità d'investimento esistenti sul mercato il primo e il terzo titolo, quest ultimo presente in quantità maggiore. Quando invece il Fondo persegue una strategia d'investimento mixando tra obbligazioni e azioni si nota che, pur non modificandosi la tipologia dei titoli selezionati saranno infatti sempre il primo ed il terzo ad essere scelti, cambia la proporzione con cui tali titoli saranno ora presenti in portafoglio preferendo in questo caso una maggiore quantità del titolo 1 rispetto al titolo 3.

CAPITOLO III

BENESSERE SOCIALE ED IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA: UN MODELLO DI *ALM* INTEGRATO

3. IL PROBLEMA DI SELEZIONE DEL PORTAFOGLIO OTTIMALE: IL PUNTO DI VISTA DELL' ADERENTE AL FONDO

Fino a questo punto abbiamo considerato il problema di allocazione ottimale delle risorse (attivi) solo dal punto di vista del Fondo Pensione. Quello che va specificato è che, in generale, quanto e come il Fondo può investire dipenderà tanto dai contributi ricevuti che dalle preferenze in termini di rischio rendimento di ciascun aderente.

In effetti l'allocazione ottima delle risorse fin qui individuata non dice nulla sulla distribuzione del benessere tra gli individui, pertanto quello che proporremo ora è una metodologia che ci consenta di trattare tale tipo di problema.

Normalmente le preferenze di ciascun consumatore (aderente) si definiscono in relazione al suo paniere di beni (nel nostro caso azioni ed obbligazioni). Ipotizziamo inoltre, estendendo tale concetto, che ciascun consumatore abbia delle preferenze relativamente a tutte le allocazioni di beni tra tutti i consumatori; questo implicitamente comporta che nessun consumatore si preoccupa di ciò che gli altri hanno essendo interessato esclusivamente al proprio paniere di beni. Date le preferenze di tutti i consumatori quello che si vuole individuare è un meccanismo che possa aggregare tali preferenze per ottenere una preferenza sociale.

Le preferenze che ciascun individuo i ha, relativamente alle allocazioni delle risorse, sono esprimibili attraverso delle funzioni di utilità. In generale, se consideriamo solo due allocazioni x e y possiamo dire che l'individuo i preferirà x a y se e solo se:

$$x \succ y, \qquad\qquad u_i(x) > u_i(y).$$

Nel passare dalle preferenze individuali a quelle sociali si deve imporre una restrizione plausibile alla funzione aggregata e cioè che questa risulti crescente relativamente all'utilità di ciascun individuo nel senso che se tutti gli individui preferiscono x a y allora x sarà preferito a y anche al livello sociale. La funzione così individuata è definita funzione del benessere sociale e la indicheremo con:

$$W(u_1(x),\dots\dots, u_n(x)),$$

dove n è il numero degli individui della società.

Esistono diversi modi per esprimere la funzione del benessere sociale[44]. In particolare:

$$W(u_1,\dots\dots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad, \qquad [99]$$

ovvero la funzione del benessere sociale altro non è che la somma delle funzioni di utilità individuali. Tale funzione è detta funzione utilitaristica o di Bentham.

Una sua generalizzazione è la funzione di benessere della somma ponderata delle utilità:

$$W(u_1,\dots\dots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \quad, \qquad [100]$$

dove con $a_1,\dots\dots, a_n$ è indicato il peso assegnato all'utilità di ciascun individuo relativamente al benessere sociale.

Altro esempio di funzione del benessere sociale è:

$$W(u_1,\dots\dots, u_n) = min(u_1,\dots\dots, u_n), \qquad [101]$$

detta funzione di Rawls. In essa il benessere sociale di un'allocazione dipende solo dal benessere dell'individuo che si trova nella posizione peggiore è cioè quello con utilità minima.

[44] Si veda in proposito Varian H., *Microeconomia, 1998*, Ed. Cafoscarina, pp. 504-505

3.1 LA MASSIMIZZAZIONE DEL BENESSERE

Il problema che ci proponiamo di affrontare ora è come di fatto massimizzare tale benessere sociale. Supponiamo che ci siano *n* consumatori e *k* beni da distribuire e sia x_i^j la quantità del bene *j* posseduta dall'individuo *i*. Inoltre intenderemo per allocazione *x* l'insieme delle quantità di ciascun bene posseduto da ciascun individuo. Siano poi $X^1,\ldots\ldots, X^k$ le quantità totali dei beni da *1* a *k* da distribuire tra i vari consumatori. Il problema di massimizzazione del benessere sociale può essere così formulato:

$$max\ W\,(u_1(x),\ldots\ldots\ u_n(x))\quad , \qquad [101]$$

tale che:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i^1 &= X^1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^k &= X^k \end{aligned} \qquad [101.1]$$

Un'allocazione che massimizzi il benessere sociale deve essere Pareto-efficiente. A tal proposito ricordiamo che un'allocazione è Pareto-efficiente se si realizza almeno una di queste condizioni:

1) non si può aumentare la soddisfazione di tutti gli scambisti;
2) non si può aumentare la soddisfazione di qualche scambista senza diminuire quella di qualcun altro;
3) tutte le opportunità vantaggiose derivanti dallo scambio sono state sfruttate;
4) non è possibile effettuare ulteriori scambi reciprocamente vantaggiosi.

In effetti, se così non fosse esisterebbero altre allocazioni realizzabili che possono aumentare l'utilità di alcuni individui senza diminuire quella di altri. Ad ogni modo però sappiamo che la funzione di benessere cresce al crescere dell'utilità di ciascun individuo e dunque la nuova allocazione dovrebbe essere caratterizzata da un benessere più elevato, il che contraddice l'ipotesi iniziale di massimo benessere. Aiutiamoci con una rappresentazione grafica (Figura 10):

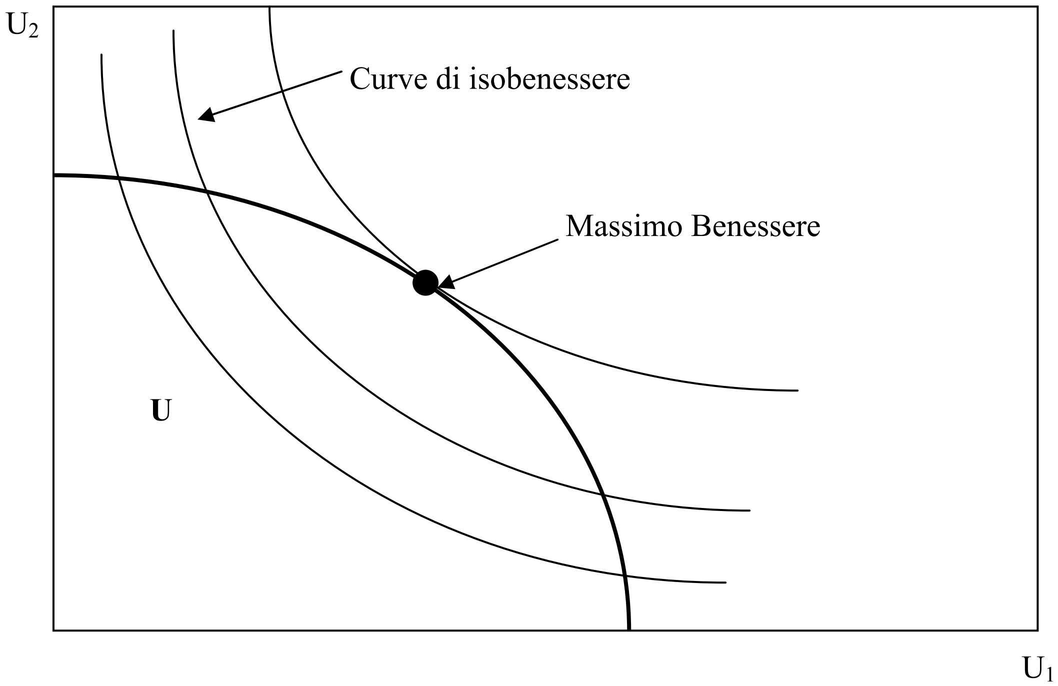

Figura 10: *Massimizzazione del benessere*

Nella Figura 10 abbiamo indicato con **U** l'insieme delle utilità possibili nel caso di due individui la cui frontiera è definita frontiera delle utilità possibili ed è l'insieme dei livelli di utilità corrispondenti alle allocazioni Pareto-efficienti. Se un'allocazione si trova sulla frontiera di questo insieme, allora non esistono altre allocazioni realizzabili con livelli di utilità più elevati per entrambi gli individui. Le curve d'indifferenza nella Figura 10 sono definite curve di isobenessere e rappresentano le distribuzioni di utilità in cui il benessere è costante. Il punto di ottimo, ovvero, di massimo benessere, è un punto Pareto-efficiente ed è evidente come esso si caratterizzi per una condizione di tangenza tra la più alta curva di isobenessere e la frontiera delle utilità possibili.

3.1.1 FUNZIONI INDIVIDUALI DI BENESSERE SOCIALE

Fino ad ora abbiamo considerato le preferenze degli individui rispetto a tutte le allocazioni, piuttosto che al paniere di beni di ciascun individuo. Ad ogni modo abbiamo detto che gli individui sono interessati esclusivamente ai propri panieri, pertanto definiamo con x_i il paniere di consumo dell'individuo *i* e con $u(x_i)$ il suo livello di utilità. Alla luce di quanto detto possiamo riscrivere la funzione di benessere sociale[45] come:

$$W = W(u_1(x_1),\ldots\ldots, u_n(x_n)) \ . \qquad [102]$$

La [102] è detta funzione di benessere individuale o funzione di benessere di Bergson-Samuelson.

Se l'utilità di ciascun individuo dipende esclusivamente dal suo consumo, ciò significa che non esistono esternalità di consumo[46] e dunque si viene a stabilire una stretta relazione tra allocazioni Pareto-efficienti ed equilibri di mercato nel senso che tutti gli equilibri concorrenziali sono Pareto-efficienti ed in ipotesi di convessità dell'insieme delle utilità possibili (come visto in Figura 10), tutte le allocazioni Pareto-efficenti sono equilibri concorrenziali. Inoltre, data la corrispondenza tra punti Pareto-efficienti e punti di massimo benessere, possiamo concludere che tutti i punti di massimo benessere sono equilibri concorrenziali e che viceversa tutti gli equilibri concorrenziali sono punti di massimo benessere per qualche funzione di benessere.

3.2 IL MODELLO DI MASSIMIZZAZIONE DEL BENESSERE SOCIALE PER IL FONDO PENSIONE

Estendiamo il discorso fatto nei paragrafi precedenti alla politica di *asset allocation* perseguita dal Fondo Pensione. Il Fondo raccoglie somme dagli investitori/aderenti che dovrà decidere di investire sul mercato tra le varie classi di

[45] A tal proposito si veda Varian H., *Microeconomia, 1998*, Ed. Cafoscarina, pag. 508
[46] A tal proposito si veda Varian H., *Microeconomia, 1998*, Ed. Cafoscarina, pag. 513.

attivi presenti, in modo da tener conto delle preferenze degli stessi nei confronti del rischio così da massimizzare il benessere sociale della collettività che lo compone considerando che ciascun individuo è interessato esclusivamente all'utilità che gli deriva dal paniere di beni effettivamente posseduto. Si tratterà pertanto di massimizzare una funzione individuale di benessere sociale del tipo:

$$max \quad W(u(x_1^k), u(x_2^k), \ldots\ldots, u(x_n^k)) , \qquad [103]$$

soggetto al vincolo:

$$T(X_1^k, \ldots\ldots, X_n^k) = 0 \quad , \qquad [103.1]$$

avendo indicato con:

n= numero degli aderenti al Fondo;
k= beni che si debbono ripartire tra gli n aderenti;
$T(X_1^k, \ldots\ldots, X_n^k)$ = vincolo tecnologico per il Fondo con $(X_1^k, \ldots\ldots, X_n^k)$ quantità totale dei beni prodotti (acquistati sul mercato), da distribuire tra gli n aderenti.

Il problema che abbiamo descritto prevede dunque la specifica di alcune variabili fondamentali. Si tratterà in sostanza di definire:

1) la funzione di utilità individuale;
2) il vincolo tecnologico per il Fondo Pensione, ovvero il modo con cui il Fondo riesce a "produrre" quei beni che poi dovrà ripartire tra i vari aderenti;
3) una modalità di aggregazione delle preferenze individuali così da definire una funzione di benessere sociale.

Nello specificare tali componenti considereremo l'ipotesi semplificatrice in cui ci siano $n=2$ individui aderenti al Fondo, che indicheremo con A e B, e due beni in cui il Fondo debba investire quanto raccolto dai propri aderenti quali obbligazioni ed azioni, che indicheremo rispettivamente con 1 e 2. In particolare, assumeremo poi che quanto ricevuto dagli aderenti sia l'unica fonte di entrata per il Fondo per cui il totale dei contributi incassati costituisce il totale degli attivi per lo stesso.

Inoltre equipareremo le quantità x_A^1, x_A^2, x_B^1, x_B^2 dei beni che i due individui possiedono, al valore monetario dei portafogli azionari ed obbligazionari che il Fondo Pensione riesce a comporre per essi considerando le loro preferenze al rischio, tenendo conto che gli input particolari per realizzare questa produzione per il Fondo, sono rappresentati dai redditi e dunque dalle quote contributive dei due aderenti.

3.2.1 LA FUNZIONE DI UTILITA' INDIVIDUALE

Definire la funzione di utilità individuale significa scegliere, tra le varie funzioni di utilità esistenti, una che riesca a descrivere le preferenze degli aderenti verso i due beni che andremo a considerare. In particolare, si tratterà di utilizzare una funzione di utilità che ci consenta di descrivere le preferenze di ciascun aderente nei confronti del rischio, dato che senza dubbio tali preferenze influenzeranno la possibile composizione dei portafogli dagli stessi posseduti in termini di tipologie di attivi in essi presenti. Va da sé infatti che, con riferimento ai beni da noi considerati, un individuo più propenso al rischio tenderà a preferire un portafoglio con una maggiore percentuale di titoli azionari rispetto ad un individuo più avverso al rischio che preferirà invece un portafoglio che si componga maggiormente di titoli obbligazionari.

Nel corso del lavoro ipotizzeremo che:

$$u_A(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} \quad , \qquad [104]$$

$$u_B(x_1, x_2) = x_1^{\beta} \cdot x_2^{1-\beta} \qquad [105]$$

ovvero che le preferenze dei due individui per i due beni considerati siano espresse da una funzione di utilità di tipo Cobb-Douglas[47] in cui ipotizziamo che il consumatore spenda sempre una frazione fissa del proprio reddito per ciascun bene. In particolare, tale frazione è individuata nelle espressioni [104] e [105] dagli esponenti delle due funzioni di utilità α e β che sono riassuntivi dell'atteggiamento degli individui verso il rischio. Maggiori saranno i valori di α e β e tanto più bassa sarà la propensione al rischio degli individui considerati. La rappresentazione grafica di una funzione di utilità costituisce la cosiddetta curva d'indifferenza che rappresenta l'insieme dei panieri di beni che lasciano il consumatore indifferente nei confronti del paniere dato. La sua inclinazione prende il nome di saggio marginale di sostituzione (SMS) e descrive il saggio al quale il consumatore è disposto a sostituire un bene con l'altro. Tale valore può essere calcolato qualunque sia la funzione di utilità scelta, come:

$$MRS = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}, \qquad [106]$$

in sintesi, esso è pari al reciproco del rapporto tra le utilità marginali dei due beni ed è dotato di segno negativo questo perché se si ottiene una quantità maggiore del bene 1 si dovrà avere una quantità minore del bene 2 al fine di mantenere lo stesso livello di utilità ovvero al fine di rimanere sulla stessa curva d'indifferenza. Inoltre abbiamo detto che la funzione di utilità per i due individui è di tipo Cobb-Douglas, come tale gode delle proprietà di convessità e di monotonicità e descrive un esempio tipico di preferenze regolari o well-behaved che farà si che le stesse siano descritte da un insieme di tipo convesso (si veda Figura 11). In tale tipo di preferenze il SMS è negativo ed è decrescente in valore assoluto, ciò significa che il saggio al quale un individuo è disposto a scambiare una data quantità del bene 1 con il bene 2 diminuisce all'aumentare della quantità del bene 1 posseduta, o in atri termini maggiore è la quantità di un bene di cui si dispone più si è disposti a cederne qualche frazione in cambio dell'altro bene.

[47] Per maggiori dettagli sull'argomento si veda Varian H., *Microeconomia, 1998,* Ed. Cafoscarina, pp. 60 e seguenti.

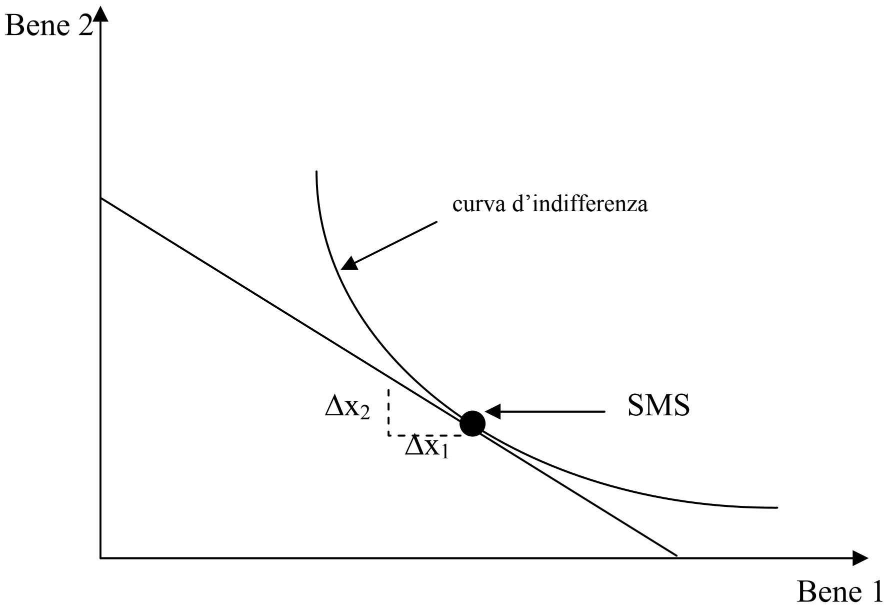

Figura 11: *Preferenze regolari o well-behaved*

3.2.2. IL VINCOLO TECNOLOGICO: L'INSIEME DELLE POSSIBILITA' DI PRODUZIONE

Nel paragrafo precedente abbiamo fondamentalmente descritto un'economia di puro scambio, un'economia cioè in cui l'equilibrio si raggiunge semplicemente per mezzo di successivi scambi tra i due individui. Abbiamo affermato che ogni equilibrio così raggiunto è, per il primo teorema dell'economia del benessere,[48] un equilibrio concorrenziale e dunque Pareto-efficiente purché le preferenze dei consumatori siano di tipo convesso. Ci proponiamo ora di vedere se tali conclusioni si mantengono valide quando consideriamo non più un'economia di puro scambio ma un'economia con produzione. Possiamo già a priori dire, per il secondo teorema del benessere,[49] che tali considerazioni si manterranno valide allorquando non solo le preferenze dei consumatori ma anche gli insiemi di produzione delle imprese siano di tipo convesso; questo implica necessariamente

[48] Si veda in proposito Varian H., *Microeconomia,1998*, Ed. Cafoscarina, pp. 473 e seguenti.
[49] Si veda in proposito Varian H., *Microeconomia,1998,* Ed. Cafoscarina, pp. 475 e seguenti.

che le tecnologie impiegate dalle imprese abbiamo rendimenti di scala costanti rispetto ad entrambi i fattori impiegati o decrescenti rispetto ad ogni singolo fattore impiegato[50].

Considereremo nel modello che vogliamo proporre il Fondo Pensione alla stregua di un produttore che debba produrre, in questa economia piuttosto semplificata, due soli beni, un portafoglio di azioni ed un portafoglio di obbligazioni, con due soli input, il reddito dell'individuo *A* e il reddito dell'individuo *B*. Definiamo inoltre insieme delle possibilità di produzione le varie combinazioni di beni che il Fondo può produrre e chiamiamo la sua frontiera la frontiera delle possibilità di produzione. La forma dell'insieme delle possibilità di produzione dipende esclusivamente dalla tecnologia impiegata nella produzione. Nel corso del lavoro ipotizzeremo una tecnologia che abbia rendimenti di scala costanti, nel senso che la quantità prodotta dei due beni è funzione esclusivamente della quantità di input che si decide di destinare all'acquisto degli stessi, per cui, se ad esempio l'individuo *A* decidesse di raddoppiare il reddito che vuole destinare all'acquisto di azioni ed obbligazioni, anche la quantità di output che il Fondo riesce a produrre raddoppierà. Stesso discorso dicasi per l'individuo *B*.

Per meglio comprendere facciamo un esempio e descriviamo quale siano le preferenze dei due individui per i due beni prima dell'adesione ad uno schema di previdenza complementare. Ipotizziamo che l'individuo *A* destina una frazione del *70%* del proprio reddito all'acquisto di obbligazioni ed una frazione pari al *30%* all'acquisto di azioni e che il suo reddito complessivo, ovvero la sua quota contributiva al Fondo, sia pari a *€450,00*; mentre l'individuo *B* destina una frazione del *40%* del proprio reddito all'acquisto di obbligazioni ed una frazione pari al *60%* all'acquisto di azioni con un analoga quota contributiva. E' evidente come i due individui abbiamo un diverso atteggiamento nei confronti del rischio. Quanto dei due beni il Fondo riuscirà a produrre è sicuramente funzione di queste grandezze. Scriviamo prima le possibilità di produzione per il Fondo considerando i due aderenti separatamente. Quando l'unico aderente al Fondo è

[50] Si veda in proposito Varian H., *Microeconomia,* 1998, Ed. Cafoscarina, pp. 294 e seguenti.

l'individuo A le relazioni sulla produzione sono rappresentate da queste espressioni:

$$x_A^1 = 0{,}70 \cdot R_A^1$$
$$x_A^2 = 0{,}30 \cdot R_A^2 \qquad [107]$$

con un vincolo sulle risorse pari a:

$$R_A^1 + R_A^2 = R_A \qquad [108]$$

Per determinare la frontiera delle possibilità di produzione risolviamo rispetto ad R_A^1 e R_A^2 la [107] e otteniamo:

$$R_A^1 = \frac{x_A^1}{0{,}70}$$
$$R_A^2 = \frac{x_A^2}{0{,}30} \qquad [109]$$

inoltre per la [108] sarà:

$$\frac{x_A^1}{0{,}7} + \frac{x_A^2}{0{,}3} = 450 \quad . \qquad [110]$$

La [110] rappresenta l'insieme delle possibilità di produzione per il Fondo quando allo stesso aderisca il solo individuo A. L'inclinazione di questo insieme sarà $-\frac{\Delta x_A^2}{\Delta x_A^1} = -\frac{0{,}3}{0{,}7} = -0{,}428$ e graficamente avremo (si veda Figura 12):

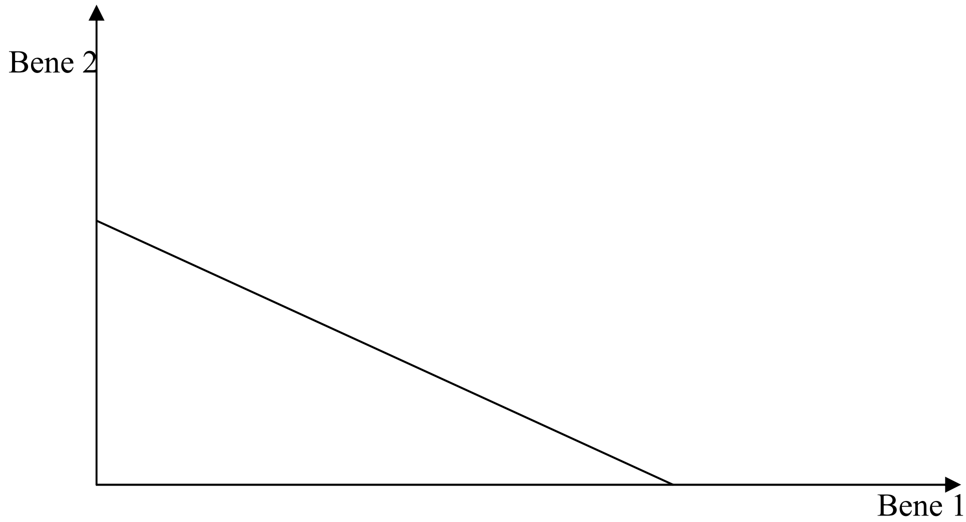

Figura 12: *insieme di produzione per il Fondo con individuo A come unico aderente*

Se al Fondo aderisse invece solo l'individuo B, avremmo tale insieme di produzione:

$$\frac{x_B^1}{0,4} + \frac{x_B^2}{0,6} = 450 \qquad [111]$$

con questa inclinazione $-\frac{\Delta x_B^2}{\Delta x_B^1} = -\frac{0,6}{0,4} = -1,5$ e graficamente (si veda Figura 13):

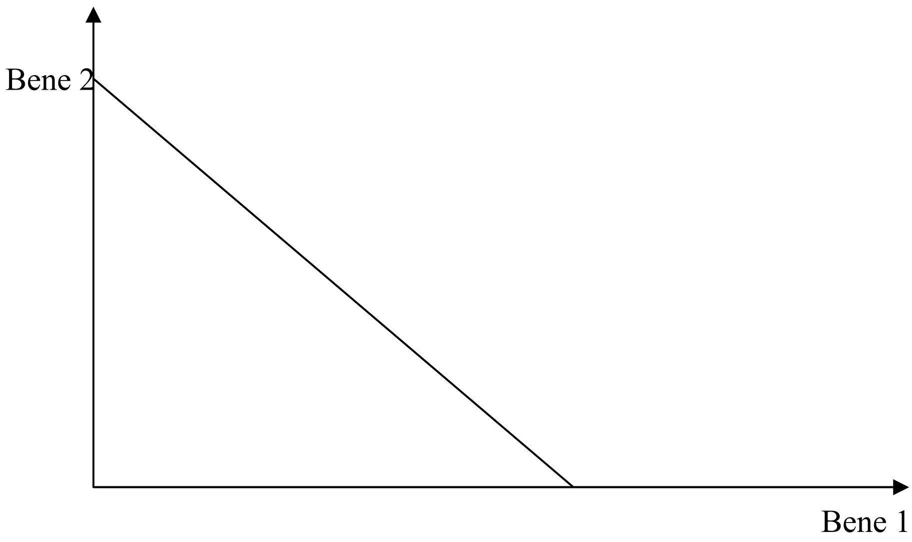

Figura 13: *insieme di produzione per il Fondo con individuo B come unico aderente*

Quello che risulta abbastanza evidente dalle due Figure è come di fatto il Fondo produrrebbe più obbligazioni se ad esso aderisse solo l'individuo *A* mentre produrrebbe più azioni nel caso in cui vi aderisse solo l'individuo *B*.

L'insieme delle possibilità di produzione congiunta è la combinazione degli insiemi di produzione visti in precedenza cioè:

$$T(X^1, X^2) = \frac{x_A^1}{0,7} + \frac{x_A^2}{0,3} + \frac{x_B^1}{0,4} + \frac{x_B^2}{0,6} = 900 \quad . \qquad [112]$$

Graficamente si ha:

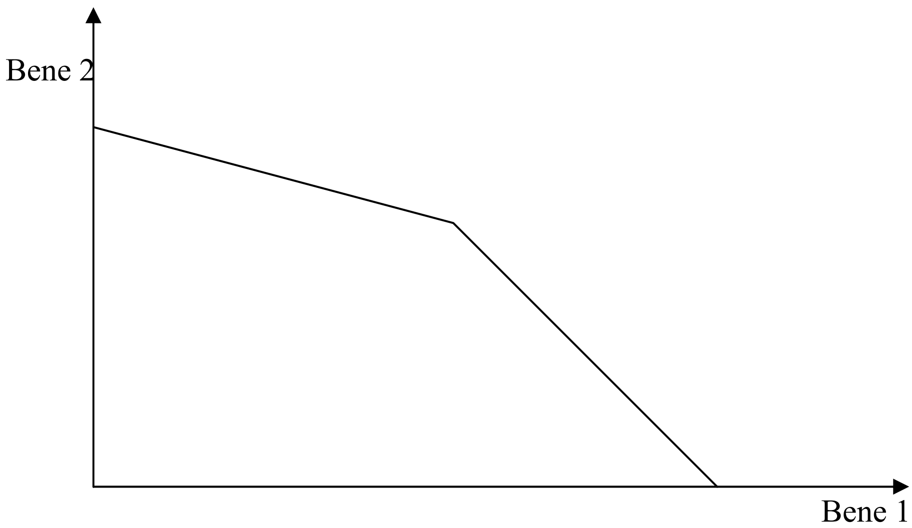

Figura 14: *insieme di produzione per il Fondo con A e B aderenti*

Poiché il Fondo ha un vantaggio differente nella produzione dei due beni a seconda il soggetto che vi aderisce, l'insieme delle possibilità di produzione presenta un angolo. In questo caso vi è un solo angolo perché esistono solo due modi differenti per il Fondo di produrre i due beni (quello che scaturisce dalle preferenze dell'individuo *A* e quello deducibile dalle preferenze dell'individuo *B*). Se esistessero altri modi di produrre i due output, ovvero, se si considerasse una collettività più ampia che componesse il Fondo Pensione, allora l'insieme di produzione avrebbe una forma più arrotondata del tipo descritto in Figura 15:

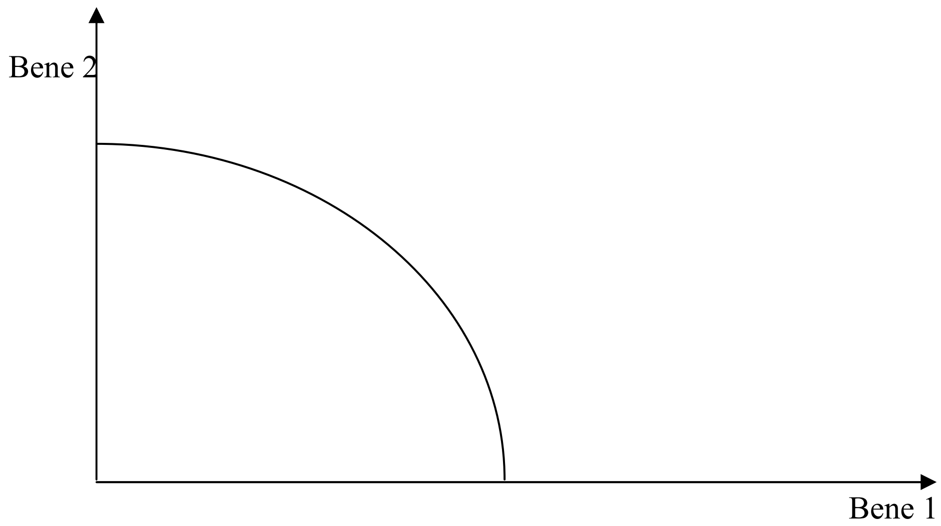

Figura 15: *insieme di produzione per il Fondo con n aderenti*

Bisogna inoltre ricordare che l'inclinazione dell'insieme di produzione rappresenta il saggio marginale di trasformazione, SMT, ovvero il saggio al quale un consumatore è disposto a trasformare[51] un bene nell'altro che si ottiene come:

$$SMT = \frac{\partial T / \partial X^1}{\partial T / \partial X^2}, \qquad [113]$$

avendo indicato con X^1 e X^2 la quantità totale dei due beni prodotti e distribuiti tra gli aderenti *A* e *B*.

3.2.3 EFFICIENZA PARETIANA

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato solo l'insieme delle possibilità di produzione, l'insieme cioè dei panieri di consumo effettivamente realizzabili dall'economia nel suo complesso. Si tratterà ora di individuare i criteri Pareto-efficienti per scegliere tra i panieri di consumo realizzabili, in effetti ciò che stiamo considerando è un'economia in cui coesistono sia la produzione che lo

[51] Questo non significa che un bene venga letteralmente trasformato nell'altro, piuttosto si fa riferimento al modo in cui i fattori produttivi possono essere modificati in modo da produrre una quantità minore di un bene ed una quantità maggiore dell'altro.

scambio. Riprendiamo la Figura 15 e tracciamo all'interno della stessa i livelli di consumo Pareto-efficienti. Stiamo sempre considerando due individui che decidono di scambiarsi i due beni che sono al tempo stesso quelli prodotti dal Fondo ovvero il portafoglio azionario e quello obbligazionario. I livelli di consumo Pareto-efficienti per i due individui si trovano all'interno dell'insieme di Pareto, cioè lungo la curva che passa per i punti di tangenza delle curve d'indifferenza. In particolar modo tale curva prende il nome di curva dei contratti perché è costituita dai punti che vengono raggiunti mediante gli scambi volontari tra i due individui. In effetti gli individui si sposteranno mediante scambi convenienti per entrambi dai punti d'intersezione delle rispettive curve d'indifferenza ai punti di contatto (di tangenza) dai quali non si sposteranno ulteriormente in quanto in ciascun punto di tangenza lo scambio non è più conveniente per nessuno dei due individui. Questi punti di tangenza, infatti, sono i punti in cui il saggio marginale di sostituzione di ciascun consumatore è uguale a quello dell'altro. Un'allocazione Pareto-efficiente è quella in cui il SMS di ciascun consumatore coincide con il SMT ovvero con l'inclinazione dell'insieme di produzione. Si veda in proposito la Figura 16:

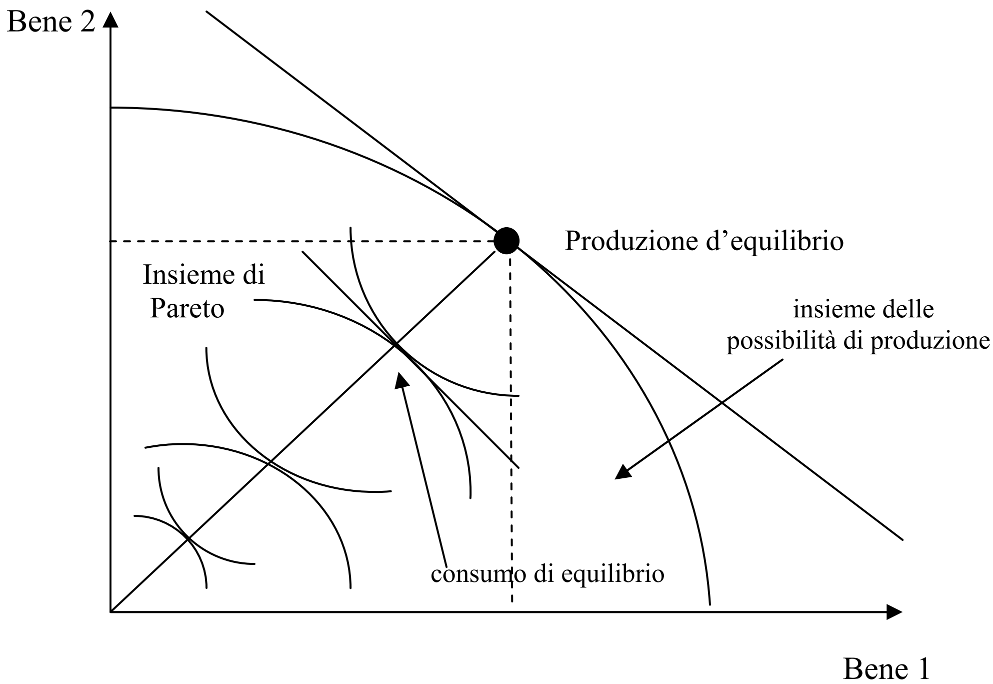

Figura 16: *produzione di equilibrio*

3.2.4 LA FUNZIONE DEL BENESSERE SOCIALE

L’ultimo passo che bisogna compiere prima di procedere alla massimizzazione del benessere sociale è quello di trovare una modalità per aggregare le funzioni di utilità individuali allo scopo di ottenere un’espressione che consenta di descrivere le preferenze sociali. In particolar modo, abbiamo già detto che consideriamo il caso in cui ciascun consumatore sia interessato esclusivamente all’ utilità derivante dal consumo del paniere di beni effettivamente posseduto, per cui andremo a specificare una funzione individuale del benessere sociale. Sulla scorta di quanto già riportato nel § 12 considereremo la funzione descritta alla [99], pertanto sarà:

$$W(u_A(x_A^1, x_A^2), u_B(x_B^1, x_B^2)) = u_A(x_A^1, x_A^2) + u_B(x_B^1, x_B^2), \quad [114]$$

Ovvero, riprendendo quanto già scritto nelle [104] e [105], avremo:

$$W(u_A(x_A^1, x_A^2), u_B(x_B^1, x_B^2)) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} + x_1^{\beta} \cdot x_2^{1-\beta} \quad . \quad [115]$$

L’espressione [114] rappresenta la funzione individuale del benessere sociale che il Fondo dovrà massimizzare nella definizione della propria politica di *asset allocation.*

3.3 IL PROBLEMA DELLA MASSIMIZZAZIONE DEL BENESSERE SOCIALE

Una volta specificati tutti gli elementi che il Fondo dovrà tenere in considerazione nella definizione di una politica ottimale d’investimento, formuliamo opportunamente il problema di massimizzazione del benessere sociale.

Si tratterà in sostanza di risolvere un problema di massimizzazione vincolata del tipo:

$$\max_{x_A^1, x_A^2, x_B^1, x_B^2} W(u_A(x_A^1, x_A^2), u_B(x_B^1, x_B^2)) \quad , \qquad [116]$$

soggetto al vincolo:

$$T(X^1, X^2) = 0 \quad . \qquad [116.1]$$

A tal fine facciamo ricorso al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

La Lagrangiana per il problema diviene:

$$L = W(u_A(x_A^1, x_A^2), u_B(x_B^1, x_B^2)) - \lambda T(X^1, X^2) = 0 \quad . [117]$$

Differenziando rispetto a ciascuna variabile di scelta, otteniamo le condizioni del primo ordine, cioè:

$$\frac{\partial L}{\partial x_A^1} = \frac{\partial W}{\partial u_A} \frac{\partial u_A(x_A^1, x_A^2)}{\partial x_A^1} - \lambda \frac{\partial T(X^1, X^2)}{\partial X^1} = 0 \quad , \qquad [117.1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_A^2} = \frac{\partial W}{\partial u_A} \frac{\partial u_A(x_A^1, x_A^2)}{\partial x_A^2} - \lambda \frac{\partial T(X^1, X^2)}{\partial X^2} = 0 \quad , \qquad [117.2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_B^1} = \frac{\partial W}{\partial u_B} \frac{\partial u_B(x_B^1, x_B^2)}{\partial x_B^1} - \lambda \frac{\partial T(X^1, X^2)}{\partial X^1} = 0 \quad , \qquad [117.3]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_B^2} = \frac{\partial W}{\partial u_B} \frac{\partial u_B(x_B^1, x_B^2)}{\partial x_B^2} - \lambda \frac{\partial T(X^1, X^2)}{\partial X^2} = 0 \quad . \qquad [117.4]$$

Con opportune trasformazioni dalle precedenti otteniamo:

$$\frac{\partial u_A \,/\, \partial x_A^1}{\partial u_A \,/\, \partial x_A^2} = \frac{\partial T \,/\, \partial X^1}{\partial T \,/\, \partial X^2} \qquad [118]$$

e

$$\frac{\partial u_B \,/\, \partial x_B^1}{\partial u_B \,/\, \partial x_B^2} = \frac{\partial T \,/\, \partial X^1}{\partial T \,/\, \partial X^2} \quad . \qquad [119]$$

I membri di sinistra delle espressioni [118] e [119] sono i saggi marginali di sostituzione, cioè i saggi al quale ciascun consumatore è disposto a sostituire un bene (portafoglio) con l'altro, mentre i membri di destra rappresentano il saggio marginale di trasformazione, il saggio al quale ciascun consumatore è disposto a trasformare un bene nell'altro.

Questo risultato è abbastanza intuitivo. In effetti, se così non fosse ed il SMS di qualche consumatore fosse diverso dal SMT, il saggio al quale un consumatore è disposto a rinunciare ad una certa quantità di un bene per ottenerne una maggiore quantità dell'altro sarà diverso dal saggio in base al quale ciò è tecnicamente possibile, ma questo d'altro canto significherebbe che è sempre possibile aumentare l'utilità di un individuo senza influire sul consumo dell'altro, ovvero in altri termini non siamo in una situazione di Pareto-efficienza.

Cominciamo con il formulare il problema in termini più generali, ovvero, considereremo inizialmente il caso in cui il Fondo debba provvedere unicamente a massimizzare il benessere sociale dei propri aderenti prescindendo da qualunque considerazione relativamente alla politica ottimale di selezione di portafogli di attivi che consenta allo stesso la completa immunizzazione.

Si tratterà di individuare le aliquote ottime (i portafogli ottimi) per i due individui A e B, x^1_A , x^2_A , x^1_B , x^2_B , che verifichino le espressioni [118] e [119].

Con riferimento a quanto da noi specificato nella [115] e nella [112] il problema di massimizzazione del benessere sociale diviene:

$$\max_{x^1_A, x^2_A, x^1_B, x^2_B} (x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} + x_1^{\beta} \cdot x_2^{1-\beta}) \quad , \qquad [120]$$

soggetto al vincolo:

$$\frac{x^1_A}{0,7} + \frac{x^2_A}{0,3} + \frac{x^1_B}{0,4} + \frac{x^2_B}{0,6} - 900 = 0 \quad . \qquad [120.1]$$

Cominciamo considerando l'aderente A. Avremo:

$$\frac{\partial u_A / \partial x^1_A}{\partial u_A / \partial x^2_A} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_2^{-\alpha} x_1^{\alpha}} = \frac{\alpha x_2}{(1-\alpha) x_1} \qquad [121]$$

e

$$\frac{\partial T \; / \; \partial X^1}{\partial T \; / \; \partial X^2} = \frac{\frac{1}{0,7} + \frac{1}{0,4}}{\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,6}} = 0,785714285 \quad . \qquad [122]$$

Uguagliando la [121] e la [122] , per l'espressione [118] si ha:

$$\frac{\alpha x_2}{(1-\alpha)x_1} = 0{,}785714285$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} 0{,}785714285 = 0{,}336734 \qquad [123]$$

La [123] descrive di fatto l'uguaglianza tra il saggio marginale di sostituzione ed il saggio marginale di trasformazione tra i due beni per l'individuo *A*. Poniamo a questo punto:

$$x_2 = 0{,}336734 \ x_1 \qquad [124]$$

e sostituiamo quanto individuato all'interno del vincolo di produzione descritto dalla [110]. Avremo:

$$\frac{x_1}{0{,}7} + \frac{0{,}336734 \quad x_1}{0{,}3} - 450 = 0 \quad , \qquad [125]$$

da cui:

$$x_1 = \frac{450}{\left(\frac{1}{0{,}7} + \frac{0{,}336734}{0{,}3}\right)} = 176{,}4 \qquad [126]$$

e , per la [124]:

$$x_2 = 59{,}39 \quad . \qquad [127]$$

Quanto individuato rappresenta il valore dei portafogli azionari ed obbligazionari che il Fondo dovrebbe costituire per l'individuo *A* nel problema di massimizzazione del benessere sociale, cui corrisponde un valore della funzione di utilità pari a:

$$u_A(x_A^1, x_A^2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} = 127{,}25 \quad . \qquad [128]$$

Appare evidente come l'adesione allo schema di previdenza complementare vada a modificare la modalità di ripartizione del reddito dell'individuo tra i due beni (portafoglio azionario ed obbligazionario) rispetto alle preferenze iniziali dello stesso ante adesione. Si veda in proposito la Tabella 6.

	Ripartizione reddito prima dell'adesione al Fondo		*Ripartizione reddito dopo adesione al Fondo*
αR_A	315	R_A^1	252
$(1-\alpha)R_A$	135	R_A^2	198

Tabella 6: *ripartizione del reddito tra i due beni per l'individuo A*

Consideriamo ora l'aderente *B.* Avremo:

$$\frac{\partial u_B / \partial x_B^1}{\partial u_B / \partial x_\beta^2} = \frac{\beta x_1^{\beta-1} x_2^{1-\beta}}{(1-\beta) x_2^{-\beta} x_1^{\beta}} = \frac{\beta x_2}{(1-\beta) x_1} \qquad [129]$$

e

$$\frac{\partial T / \partial X^1}{\partial T / \partial X^2} = \frac{\frac{1}{0{,}7} + \frac{1}{0{,}4}}{\frac{1}{0{,}3} + \frac{1}{0{,}6}} = 0{,}785714285 \quad . \qquad [130]$$

Uguagliando la [129] e la [130] per l'espressione [119] si ha:

$$\frac{\beta x_2}{(1-\beta)x_1} = 0,785714285$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(1-\beta)}{\beta} 0,785714285 = 1,178571 \qquad [131]$$

La [131] descrive di fatto l'uguaglianza tra il saggio marginale di sostituzione ed il saggio marginale di trasformazione tra i due beni per l'individuo *B*. Poniamo a questo punto:

$$x_2 = 1,178571\, x_1 \qquad [132]$$

e sostituiamo quanto individuato all'interno del vincolo di produzione descritto dalla [111]. Avremo:

$$\frac{x_1}{0,4} + \frac{1,178571 \quad x_1}{0,6} - 450 = 0 \;, \qquad [133]$$

da cui:

$$x_1 = \frac{450}{\left(\frac{1}{0,4} + \frac{1,178571}{0,6}\right)} = 100,8 \qquad [134]$$

e, per la [132]:

$$x_2 = 118,80 \;. \qquad [135]$$

Quanto individuato rappresenta il valore dei portafogli azionari ed obbligazionari che il Fondo dovrebbe costituire per l'individuo *B* nel problema di massimizzazione del benessere sociale cui corrisponde un valore della funzione di utilità pari a:

$$u_B(x_B^1, x_B^2) = x_1^{\beta} \cdot x_2^{1-\beta} = 90{,}51 \quad . \qquad [136]$$

Anche in tale eventualità l'adesione allo schema di previdenza complementare influisce sulla modalità di ripartizione del reddito per l'acquisto dei rispettivi portafogli obbligazionari ed azionari si veda in proposito la Tabella 7.

	Ripartizione reddito prima dell'adesione al Fondo		*Ripartizione reddito dopo adesione al Fondo*
βR_B	180	R_B^1	252
$(1-\beta)R_B$	270	R_B^2	198

Tabella 7: r*ipartizione reddito tra i due beni per l'individuo B*

Dalla somma infine della [128] e della [136] otteniamo che il benessere sociale della collettività del Fondo Pensione è massimo quando:

$$W(u_A(x_A^1, x_A^2), u_B(x_B^1, x_B^2)) = 127{,}25 + 90{,}51 = 217{,}76 \qquad [137]$$

3.4 LA MASSIMIZZAZIONE DEL BENESSERE SOCIALE E LA TEORIA DELL'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA: UN MODELLO INTEGRATO DI *ALM*

Una politica ottima di *asset allocation* per un Fondo Pensione dovrebbe, abbiamo detto, conciliare le esigenze di tutti coloro che sono coinvolti in tale processo, il Fondo Pensione e gli aderenti che lo compongono. Quello che ci proponiamo di fare è individuare pertanto un modello di *alm* integrato che contemperi le esigenze di entrambi.

Ipotizziamo che il Fondo persegua una strategia di immunizzazione stocastica che si basa sulla ricerca di un portafoglio istantaneamente immunizzato ma a minimo costo. Quello che si determina con tale procedura è l'ammontare di spesa che il Fondo sostiene per l'acquisto sul mercato di titoli obbligazionari allorquando si consideri data e stabilita a priori la politica d'investimento che il Fondo intende perseguire per la componente azionaria del portafoglio di attivi che andrà a costituire nel complesso. Possiamo considerare tale valore di spesa per il portafoglio obbligazionario, come un nuovo vincolo sulle risorse all'interno del modello di massimizzazione del benessere sociale che diviene ora:

$$\max_{x_A^1, x_A^2, x_B^1, x_B^2} (x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} + x_1^{\beta} \cdot x_2^{1-\beta}) \quad , \qquad [138]$$

soggetto al vincolo:

$$\frac{x_A^1}{0,7} + \frac{x_A^2}{0,3} + \frac{x_B^1}{0,4} + \frac{x_B^2}{0,6} - R^* = 0 \quad , \qquad [138.1]$$

in cui:

$$R^* = \alpha R_A + \beta R_B + (1-\alpha)R_A + (1-\beta)R_B \qquad [139]$$

è la somma tra il reddito che i due individui decidono di destinare all'acquisto dei rispettivi portafogli obbligazionari $(\alpha R_A + \beta R_B)$ ed azionari $[(1-\alpha)R_A + (1-\beta)R_B]$.

Nell'esempio precedentemente esaminato abbiamo detto che l'individuo *A* era disposto a spendere il *70%* del proprio reddito per l'acquisto di titoli obbligazionari mentre l'individuo *B* destinava a tal fine il *40%*, quindi per il Fondo il vincolo per tale componente era espresso dalla:

$$\alpha R_A + \beta R_B = 0{,}7\,R_A + 0{,}4\,R_B \;. \qquad [140]$$

Essendo poi per ipotesi la quota di contribuzione la medesima per tutti gli aderenti, cioè $R_A = R_B = 450$, ne derivava nell'esempio precedentemente condotto, che la risorsa complessiva che il Fondo poteva destinare all'acquisto di titoli obbligazionari era:

$$0{,}7 \cdot 450 + 0{,}4 \cdot 450 = 495 \;. \qquad [141]$$

Consideriamo ora il caso in cui il Fondo combini le due informazioni ottenibili dal processo di selezione del portafoglio a minimo costo e da quello di massimizzazione del benessere. Vogliamo vedere quali siano gli effetti prodotti sulle aliquote ottime di composizione.
Riprendiamo il valore di spesa individuato precedentemente nel §11 nel processo di selezione di un portafoglio obbligazionario a minimo costo allorquando il Fondo decida di comporre il proprio portafoglio di attivi mixando tra azioni ed obbligazioni; tale ammontare è pari a *479,05*. Confrontiamolo con quanto individuato nella [141]. Vediamo che quanto trovato è un importo più basso, è come se di fatto ora il Fondo disponesse di una risorsa monetaria inferiore per l'acquisto delle obbligazioni, che, riformulando opportunamente la [140], diviene:

$$0{,}7\,R_A + 0{,}4\,R_B = 479{,}05 \;. \qquad [142]$$

Quanto espresso dalla [142] è equiparabile alla situazione in cui il Fondo non destina più l'intera quota contributiva ricevuta dagli aderenti alla composizione del proprio portafoglio di attivi, ma di fatto ne va ad utilizzare solo quell'ammontare che è necessario allo stesso per raggiungere il nuovo vincolo sulle risorse. In altri termini si passa dall'impiego complessivo della quota contributiva pari a € 450 ad un utilizzo della stessa per un ammontare ridotto che definiremo R'.

Calcoliamo ora tale importo e riprendiamo a tal fine la [142]. Siccome $R_A = R_B = R'$ per ipotesi, possiamo riformulare il tutto come segue:

$$
\begin{aligned}
&0{,}7R' + 0{,}4R' = 479{,}05 \\
&R' = \frac{479{,}05}{(0{,}7 + 0{,}4)} = 435{,}5
\end{aligned}
\qquad [143]
$$

In base alla [143] il nuovo vincolo sulle risorse per l’acquisto del portafoglio obbligazionario per il Fondo sarà allora:

$$0{,}7 \cdot 435{,}5 + 0{,}4 \cdot 435{,}5 = 479{,}05 \quad . \quad [144]$$

Riformuliamo alla luce di quanto detto il problema di massimizzazione del benessere sociale. Si tratterà di:

$$\max_{x_A^1, x_A^2, x_B^1, x_B^2} (x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} + x_1^{\beta} \cdot x_2^{1-\beta}) \quad , \qquad [145]$$

soggetto al nuovo vincolo:

$$\frac{x_A^1}{0{,}7} + \frac{x_A^2}{0{,}3} + \frac{x_B^1}{0{,}4} + \frac{x_B^2}{0{,}6} - 870 = 0 \quad . \qquad [145.1]$$

E’ evidente come nel caso mostrato dalla [145.1] il Fondo metta a punto la propria strategia di selezione di un portafoglio di attivi utilizzando di fatto una risorsa monetaria inferiore che è passata da € 900 come calcolato nella [120.1] a € 870 con un risparmio monetario di € 30.

Procediamo ora come nel paragrafo precedente al fine d’individuare le aliquote ottime di composizione.

Cominciamo considerando l'aderente *A*. Avremo:

$$\frac{\partial u_A / \partial x_A^1}{\partial u_A / \partial x_A^2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_2^{-\alpha} x_1^{\alpha}} = \frac{\alpha x_2}{(1-\alpha) x_1} \qquad [146]$$

e

$$\frac{\partial T \;/\; \partial X^{1}}{\partial T \;/\; \partial X^{2}} = \frac{\frac{1}{0,7} + \frac{1}{0,4}}{\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,6}} = 0,785714285 \quad . \qquad [147]$$

Uguagliando la [146] e la [147] per l'espressione [118] si ha:

$$\frac{\alpha x_2}{(1-\alpha) x_1} = 0,785714285$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} 0,785714285 \quad = 0,336734 \qquad [148]$$

La [148] descrive l'uguaglianza tra il saggio marginale di sostituzione ed il saggio marginale di trasformazione tra i due beni per l'individuo *A*. Poniamo a questo punto:

$$x_2 = 0,336734 \; x_1 \qquad [149]$$

e sostituiamo quanto individuato all'interno del vincolo di produzione che sarà modificato in virtù del nuovo reddito individuato dalla [143]. Avremo:

$$\frac{x_1}{0,7} + \frac{0,336734 \quad x_1}{0,3} - 435 \;,5 \; = \; 0 \quad , \qquad [150]$$

da cui:

$$x_1 = \frac{435,5}{\left(\frac{1}{0,7} + \frac{0,336734}{0,3}\right)} = 170,717 \qquad [151]$$

e, per la [149]:

$$x_2 = 57,486 \quad . \qquad [152]$$

Quanto individuato rappresenta il valore del portafoglio azionario ed obbligazionario che il Fondo dovrebbe costituire per l'individuo *A* nel modello di *alm* integrato, cui corrisponde un valore della funzione di utilità pari a:

$$u_A(x_A^1, x_A^2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} = 123,157 \quad . \qquad [153]$$

Inoltre è da osservare come anche nel modello di *alm* integrato, l'adesione allo schema di previdenza complementare comporti una modalità di ripartizione del reddito per l'individuo A nell'acquisto dei rispettivi portafogli obbligazionario ed azionario differente rispetto alle proprie preferenze ex ante, evidenziata maggiormente dal fatto che il Fondo va, in tale eventualità, ad utilizzare in concreto un ammontare inferiore della quota contributiva e dunque del reddito destinato dall'individuo a tal fine. Si veda in proposito la Tabella 8.

	Ripartizione reddito prima dell'adesione al Fondo		*Ripartizione reddito dopo adesione al Fondo*
αR_A	315	R_A^1	243,87
$(1-\alpha)R_A$	135	R_A^2	191,63

Tabella 8: r*ipartizione reddito tra i due beni per l'individuo A*

Consideriamo ora l'aderente *B.* Avremo:

$$\frac{\partial u_B / \partial x_B^1}{\partial u_B / \partial x_\beta^2} = \frac{\beta x_1^{\beta-1} x_2^{1-\beta}}{(1-\beta) x_2^{-\beta} x_1^{\beta}} = \frac{\beta x_2}{(1-\beta) x_1} \qquad [154]$$

e

$$\frac{\partial T / \partial X^1}{\partial T / \partial X^2} = \frac{\frac{1}{0,7} + \frac{1}{0,4}}{\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,6}} = 0,785714285 \quad . \qquad [155]$$

Uguagliando la [154] e la [155] per l'espressione [119] si ha:

$$\frac{\beta x_2}{(1-\beta) x_1} = 0,785714285$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(1-\beta)}{\beta} 0,785714285 = 1,178571 \qquad [156]$$

La [156] descrive l'uguaglianza tra il saggio marginale di sostituzione ed il saggio marginale di trasformazione tra i due beni per l'individuo *B*. Poniamo a questo punto:

$$x_2 = 1,178571\, x_1 \qquad [157]$$

e anche in questo caso in virtù del nuovo reddito individuato dalla [143], avremo:

$$\frac{x_1}{0,4} + \frac{1,178571 \quad x_1}{0,6} - 435,5 = 0 \quad , \qquad [158]$$

da cui:

$$x_1 = \frac{435,5}{\left(\frac{1}{0,4} + \frac{1,178571}{0,6}\right)} = 97,55 \qquad [159]$$

e, per la [157]:

$$x_2 = 114,97 \quad . \qquad [160]$$

Quanto individuato rappresenta il valore del portafogli azionario ed obbligazionario che il Fondo dovrebbe costituire per l'individuo *B* nel modello di *alm* integrato, cui corrisponde un valore della funzione di utilità pari a:

$$u_B(x_B^1, x_B^2) = x_1^{\beta} \cdot x_2^{1-\beta} = 87,59 \quad . \qquad [161]$$

Come per l'individuo A, l'adesione allo schema di previdenza complementare influisce sulla modalità di ripartizione del reddito per l'acquisto dei rispettivi portafogli obbligazionario ed azionario si veda in proposito la Tabella 9.

	Ripartizione reddito prima dell'adesione al Fondo		*Ripartizione reddito dopo adesione al Fondo*
βR_B	180	R_B^1	243,88
$(1-\beta)R_B$	270	R_B^2	191,62

Tabella 9: r*ipartizione reddito tra i due beni per l'individuo B*

Dalla somma infine della [153] e della [161] otteniamo che il benessere sociale della collettività del Fondo Pensione è massimo quando:

$$W(u_A(x_A^1, x_A^2), u_B(x_B^1, x_B^2)) = 123{,}157 + 87{,}59 = 210{,}747 \quad . \quad [162]$$

Riassumiamo dunque le conclusioni raggiunte nei due modelli di massimizzazione del benessere sociale e di *alm* integrato. A tal fine si vedano le Tabelle 10, 11, 12 relative all'individuo *A, B,* e al benessere sociale dell'intera collettività del Fondo Pensione:

	Massimizzazione Benessere Sociale	*Modello di alm integrato*	*Variazione percentuale*
R_A	*450*	*435,50*	*-3,22%*
α	*0,7*	*0,7*	
$(1-\alpha)$	*0,3*	*0,3*	
αR_A	*315*	*315*	
$(1-\alpha)R_A$	*135*	*135*	
x^1_A	*176,40*	*170,72*	*-3,22%*
x^2_A	*59,40*	*57,49*	*-3,22%*
R^1_A	*252*	*243,87*	*-3,22%*
R^2_A	*198*	*191,63*	*-3,22%*
U_A	*127,25*	*123,16*	*-3,22%*

***Tabella 10**: aliquote ottime di composizione nei due modelli con riferimento all'individuo A*

	Massimizzazione Benessere Sociale	*Modello di alm integrato*	*Variazione percentuale*
R_B	*450*	*435,50*	*-3,22%*
β	*0,4*	*0,4*	
$(1-\beta)$	*0,6*	*0,6*	
βR_B	*180*	*180*	
$(1-\beta)R_B$	*270*	*270*	
x^1_B	*133,41*	*129,11*	*-3,22%*
x^2_B	*69,88*	*67,63*	*-3,22%*
R^1_B	*252*	*243,88*	*-3,22%*
R^2_B	*198*	*191,62*	*-3,22%*
U_B	*90,508*	*87,59*	*-3,22%*

***Tabella 11**: aliquote ottime di composizione nei due modelli con riferimento all'individuo B*

	Massimizzazione Benessere Sociale	*Modello di alm integrato*	*Variazione percentuale*
Benessere sociale	*217,76*	*210,75*	*-3,22%*

***Tabella 12**: benessere sociale nei due modelli per l'intera collettività del Fondo Pensione*

Quello che risulta evidente da quanto esposto nelle Tabelle 10 e 11 è che passare da un modello semplice di massimizzazione del benessere sociale ad un modello di *alm* integrato, corrisponde ad una riduzione delle risorse che il Fondo può destinare all'acquisto del proprio portafoglio di attivi pur corrispondendo in effetti questo, ad una situazione che risulta più conveniente non solo per il Fondo stesso, ma anche per i propri aderenti. Ricordiamo infatti, che in questo modello di *alm* integrato si va a comporre per il Fondo un portafoglio obbligazionario che sia istantaneamente non rischioso accompagnato da un meccanismo di ripartizione delle risorse, che va di fatto a massimizzare il benessere sociale della collettività del Fondo stesso. Inoltre tale allocazione corrisponde, data l'uguaglianza tra il SMS e il SMT, ad una situazione di Pareto-efficienza e visto che si è massimizzata una funzione individuale del benessere sociale, non si generano neanche esternalità di consumo. Infine, data la convessità dell'insieme delle possibilità di produzione e dell'insieme delle utilità possibili, possiamo affermare che l'equilibrio così raggiunto è anche un equilibrio concorrenziale.

In particolar modo, è evidente come il passaggio dal modello semplice di massimizzazione del benessere al modello di *alm* integrato corrisponde alla situazione in cui il Fondo non destina più l'intera quota contributiva ricevuta dagli aderenti alla composizione del proprio portafoglio di attivi andando di fatto ad utilizzarne solo quell'ammontare che è necessario allo stesso per raggiungere il nuovo vincolo sulle risorse. Si passa, infatti, dall'utilizzo totale della quota pari a *€ 450* ad un impiego della stessa per un ammontare pari a *€ 435,5*, con una riduzione delle risorse da destinare a tal fine del 3,22%, e con un risparmio in senso finanziario di € 30. Siccome abbiamo ipotizzato che il Fondo riesca a realizzare la propria produzione, ovvero la costituzione del portafoglio di attivi, attraverso una tecnologia che ha rendimenti di scala costanti, questa riduzione di input iniziale farà sì che l'output prodotto si riduca nella stessa identica proporzione. A fronte, infatti, di una riduzione del reddito iniziale del 3,22%, il valore del portafoglio azionario ed obbligazionario composti dal Fondo e posseduto dai due individui nei due modelli si riduce esattamente nella stessa proporzione. Come conseguenza anche l'utilità dell'aderente *A* e *B* associata ai due panieri di beni nelle due diverse situazioni subisce una riduzione per un analogo ammontare. Infine, come logica deduzione osservando quanto riportato in Tabella 12, è evidente come nel passare da un modello all'altro, si riduca il benessere sociale dell'intera collettività di una percentuale ancora uguale al 3,22% passando da un valore di *217,76* ad un altro di *210,75* pur corrispondendo di fatto questo ad una situazione migliore della precedente in quanto tanto l'esigenze del Fondo che quelle dell'intera collettività sono state contestualmente soddisfatte senza arrecare nocumento ad alcuno. Con riferimento inoltre alle quota contributiva ed alla modalità con cui tale quota viene ripartita tra i due beni della nostra economia semplificata, va evidenziato come l'adesione al Fondo modifichi di fatto l'ammontare delle risorse monetarie da destinare a tal fine rispetto alle preferenze espresse in tal senso dai due individui prima dell'adesione allo schema di preferenza complementare. Si vedano in proposito le Tabelle 13,14,15,16.

	Ripartizione reddito ex ante		*Ripartizione reddito ex post*	*Variazione Percentuale*
αR_A	315	R_A^1	252	-20%
$(1-\alpha)R_A$	135	R_A^2	198	+46,67%

***Tabella 13**: ripartizione del reddito dell'individuo A tra i due beni nel modello di massimizzazione del benessere sociale*

	Ripartizione reddito ex ante		Ripartizione reddito ex post	Variazione Percentuale
βR_B	180	R_B^1	252	+40%
$(1-\beta)R_B$	270	R_B^2	198	-26,67%

***Tabella 14**: ripartizione del reddito dell'individuo B tra i due beni nel modello di massimizzazione del benessere sociale*

	Ripartizione reddito ex ante		Ripartizione reddito ex post	Variazione Percentuale
αR_A	315	R_A^1	243,87	-22,58%
$(1-\alpha)R_A$	135	R_A^2	191,63	+41,95%

***Tabella 15**: ripartizione del reddito dell'individuo A tra i due beni nel modello di alm integrato*

	Ripartizione reddito ex ante		Ripartizione reddito ex post	Variazione Percentuale
βR_B	180	R_B^1	243,88	+35,49%
$(1-\beta)R_B$	270	R_B^2	191,62	-29,03%

***Tabella 16**: ripartizione del reddito dell'individuo B tra i due beni nel modello di alm integrato*

Appare evidente in effetti dalle Tabelle sopra indicate che l'adesione ad uno schema di previdenza complementare e quindi ad un'economia in cui coesistano sia lo scambio che la produzione, va a modificare la modalità con cui i due individui vogliono ripartire il reddito tra i due beni. Tale modalità è inoltre differente all'interno del Fondo a seconda del modello considerato. In effetti nel caso in cui il Fondo decidesse di massimizzare esclusivamente il benessere della collettività che lo compone a prescindere da qualunque considerazione relativamente alle strategie di immunizzazione stocastica, le risorse da destinare all'acquisto dei due panieri di beni si modificano riducendosi del 20% per l'individuo A con riferimento alle obbligazioni ed aumentando del 46,67% per le azioni, mentre per B aumentano rispettivamente del 40% e diminuiscono del 26,67%. Stesso trend hanno le variazioni quando il Fondo decida di passare ad un modello di *alm* integrato anche se in tal caso tanto le variazioni in aumento che in diminuzione risentono della ridotta quota contributiva destinata dal Fondo in tal senso. Resta infine da fare un'ultima osservazione sulle differenze positive che si possono creare per il Fondo, e dunque per gli aderenti, nel momento in cui si pone in essere un modello di *alm* integrato. Dato che in tale ipotesi il Fondo utilizza della quota contributiva solo quella parte necessaria a coprire il nuovo vincolo sulle risorse che scaturisce dal problema di immunizzazione stocastica, si può pensare a tali differenze positive come ad un ulteriore forma di risparmio che nel corso dei vari anni può essere capitalizzata in senso strettamente finanziario e riconosciuta agli aderenti in aggiunta alla prestazione previdenziale che sarà fornita dal Fondo stesso.

CONCLUSIONI

Obiettivo di questo lavoro è stato quello di individuare un modello di *alm* integrato per un Fondo Pensione che soddisfi contemporaneamente le esigenze del Fondo stesso e degli aderenti che lo compongono. In particolare il Fondo Pensione mirerà, attraverso l'utilizzo della *duration* quale indicatore strategico, a costruire dei portafogli di attivi che siano perfettamente immunizzati. A tal fine porrà in essere, ricorrendo alla teoria dell'immunizzazione stocastica, delle strategie di selezione che consentano la definizione di portafogli almeno istantaneamente non rischiosi. Nel lavoro ci siamo occupati di riformulare opportunamente il modello di selezione di portafogli non rischiosi a minimo costo ipotizzando che il Fondo investa il proprio patrimonio in un mix di attivi che nel caso da noi esaminato sono rappresentati da obbligazioni e da azioni. Abbiamo considerato come input per il nostro modello il fatto che sia nota e stabilita a priori la politica di investimento che il Fondo intenda perseguire relativamente alle azioni, ovvero abbiamo considerato come nota la percentuale di patrimonio che il Fondo vuole investire in tali titoli, nonché la *duration* della componente azionaria così definita. Abbiamo, con riferimento al modello di immunizzazione stocastica da noi considerato, messo a punto una nuova misura della rischiosità della passività complessiva del Fondo Pensione sia in un contesto deterministico sia in un contesto stocastico considerando in modo adeguato l'incertezza attuariale e finanziaria che caratterizza le prestazioni di un Fondo Pensione. In relazione a quest'ultima, tutte le considerazioni sono state svolte con riferimento ad una dinamica stocastica dei tassi d'interesse del tipo Cir. Abbiamo inoltre provveduto a definire un modello per il calcolo della rischiosità dei titoli azionari sulla scorta di quanto fatto da Macauley per le obbligazioni riformulando il tutto al fine di considerare la natura rischiosa di tali titoli e ricorrendo per questo alla teoria delle opzioni. Quanto detto è stato infine integrato con il punto di vista dell'aderente al Fondo Pensione. Ricordiamo, infatti, che ciascun lavoratore aderisce ad uno schema di previdenza complementare allo scopo di integrare la prestazione obbligatoria che alla fine della propria attività lavorativa riceverà dall'ente pubblico. Bisogna però ricordare che ogni individuo ha delle proprie preferenze in termini di rischio-rendimento in relazione alle attività finanziarie esistenti sul mercato che scaturiscono sia dalla personale avversione/propensione al rischio sia dall'età stessa in cui ciascun lavoratore aderisce ad una schema di previdenza complementare e dunque il Fondo dovrà tenerne necessariamente conto allorquando tenderà a stabilire la propria politica di *asset allocation*. A tal fine abbiamo considerato il Fondo alla stregua di un produttore qualunque che opera sul mercato con input rappresentati dalle quote contributive dei propri aderenti e con output individuati dal valore monetario dei portafogli azionari ed obbligazionari che dovrà costituire per ogni singolo aderente. Mutuando strumenti tipici del campo economico abbiamo messo a punto un modello integrato di *alm* che combini il problema di selezione di portafoglio a minimo costo per il Fondo Pensione, con la necessità di individuare quelle allocazioni ottime che consentano allo stesso la massimizzazione del benessere sociale della collettività che lo compone. Abbiamo così individuato un modello integrato che ci consente di raggiungere una situazione di Pareto-efficienza in un'economia con produzione e scambio quale quella in cui il Fondo si trova ad operare e che soddisfa in modo contestuale l'esigenze di tutti coloro che sono coinvolti nel processo di *asset allocation*.

APPENDICE 1

Andamento di D_L al variare di N (durata del periodo di gestione)

Definiamo la *duration* per la "passività complessiva" del Fondo Pensione all'epoca *N-1*. Essa è pari a:

$$D_L(N-1) = \frac{\sum_{t=0}^{N-1} t[F_t]v^t}{\sum_{t=0}^{N-1} [F_t]v^t} \qquad [1]$$

con

$$F_t = (O_t^K - C_t + O_t - \overline{O}_t)$$

La *duration* all'epoca *N* sarà:

$$D_L(N) = \frac{\sum_{t=0}^{N} t[F_t]v^t}{\sum_{t=0}^{N} [F_t]v^t} = \frac{\sum_{t=0}^{N-1} t[F_t]v^t + NF_N v^N}{\sum_{t=0}^{N-1} [F_t]v^t + F_N v^N} =$$

$$= \frac{\sum_{t=0}^{N-1} t[F_t]v^t}{\sum_{t=0}^{N-1} [F_t]v^t + F_N v^N} + \frac{NF_N v^N}{\sum_{t=0}^{N-1} [F_t]v^t + F_N v^N} \qquad [2]$$

Affinché la *duration* della "passività complessiva" del Fondo risulti crescente all'aumentare della durata del periodo di gestione *N,* dovrà verificarsi che $D_L(N) > D_L(N-1)$.

Per la [2] si avrà che:

$$NF_N v^N > F_N v^N \qquad [3]$$

allora:

$$D_L(N) > D_L(N\text{-}1) \qquad [4]$$

se e solo se:

$$N > D_L(N\text{-}1) \qquad [5]$$

Dato che il limite superiore della *duration* è N, la condizione espressa dalla [4] sarà sempre verificata.

BIBLIOGRAFIA

1. Baz J., Chacko G., 2004, *Financial Derivates. Pricing, Application, and Mathematics*, Ed. Cambridge, University Press;
2. Benninga S., 2001, *Modelli Finanziari. La finanza con excel*, Ed. McGraw-Hill;
3. Blake D., 1992, *Modelling Pension Fund Investment Behaviour*, Ed. Routledge;
4. Bortot, P., Magnani, U., Olivieri, G., Rossi, F.A., Torrigiani, M. ,1998, *Matematica Finanziaria*, Monduzzi Editore, Bologna;
5. Caparrelli F., 2001, *I Derivati*, Ed. MCGraw-Hill;
6. Caparrelli F., *Economia del Mercato mobiliare*, Ed McGraw-Hill;
7. Cetta, F., 1991, *Analisi Finanziaria ed Innovazione Tecnologica*, Ed. CISU, Roma;
8. Codice Civile, Libro V, Del Lavoro, Capo V, Della Società Per Azioni, art. 2325 e successivi;
9. Coppini M.A., 1984, *Lezioni di tecnica delle Assicurazioni Sociali*, Ed. Veschi;
10. Cox, Ingersoll e Ross, 1979, *"Duration and the Measurement of Basis Risk"* Journal of Business, 52(1), pp.51-61;
11. Cox, Ingersoll, Ross, 1985, *A theory of the term structure of interest rates,* Econometrica, 53/2, pp.385-407;
12. Cox, Ingersoll, Ross, 1985, *An intertemporal general equilibrium model of asset prices,* Econometrica, 53/2 pp.363-384;
13. Cox, Ross, Rubinstein, 1979, *"Option pricing: a Simplified Approach*, 1979, Journal of Financial Economics, n.7, pp. 229-263;
14. De Felice M., Moriconi F., 1991, *La teoria dell'immunizzazione finanziaria*, Ed. Il Mulino;
15. De Felice M., Moriconi F., 2002, *Finanza delle Assicurazioni sulla Vita. Principi per l'asset-liability management e per la misurazione*

dell'embedded value, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Volume LXV, pp. 13-89;

16. Dechow P., Sloan R., Soliman M., 2004, *"Implied Equity Duration: A New Measure of Equity Risk"*, Review of Accounting Studies, n. 9, pp. 197-228;
17. Fedele U., 1996,*Tecnica Attuariale delle Assicurazioni Sociali,* 1996, Ed. Il Cigno Galileo Galilei;
18. Feller, 1968, *An Introduction to Probability Theory and its Application:Volume 1*, Academic Press;
19. Foschini G., Pasqualitto E., *La duration di un cash flow stocastico,* presentato al convegno Mtisd '04 del 24/25 giugno, presso l'Università del Sannio di Benevento, in corso di stampa.
20. Gordon M.J., Shapiro E., Oct. 1956, *Capital equipment Analysis: The Required Rate of Profit*, Management Science;
21. Gordon, M. J., 1962, *The Investment, Financing, and Valuation of the Corporation,* Homewood Irwin;
22. Grasso F., 2001, *Elementi di tecnica attuariale della previdenza pubblica di base,* Working Paper n.14, Dipartimento di Matematica per le Decisioni, Università degli Studi di Firenze;
23. Honegger R., Mathis C., 1993, *Duration of life inurance liabilities and asset liability management*, 3rd International Colloquium AFIR;
24. Hull, J.C., *Options, Futures and Other Derivates,* 2000, Prentice Hall;
25. Leibowitz M. L., 1986, *Total Portfolio : A New Perspective on Asset Allocation,* Financial Analysts Journal, Vol. 42, n. 5.
26. Lewin R., Satchell S., 2001, *The derivation of a new model of equity duration;*
27. M. Costabile, 2002, *"Extending the Cox-Ross-Rubinstein algorithm for pricing option with exponential boundaries"*, Proceedings of ALGORITMY, Conference on Scientific Computing, pp. 23-32;
28. Macaulay F., 1938, *Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yields and stock prices in the U.S. since 1856*, New York, National Bureau of Economic Research;

29. Moriconi F., 1994, *Matematica Finanziaria,* Ed. Il Mulino, Bologna;
30. Munk C., 1999, *Stochastic duration and fast coupond bond option. Pricing in multi-factor models*, Review of derivates research, 3, pp. 157-181;
31. Palmerio G., 2004, *Elementi di Economia Politica*, Ed. Cacucci;
32. Pasqualitto E.,*"La duration stocastica di un cash flow stocastico"* presentato al convegno "New Mathematical Methods in Risk Theory" Firenze, 6-8 ottobre 2005;
33. Pegoraro F., 2000, *La struttura a termine dei tassi d'interesse e trading su titoli:un approccio con il modello CIR al mercato italiano dei BTP*, pubblicato per GRETA, Working Paper n. 00.02;
34. Piccolo D., 2000, *Statistica,* Ed. Il Mulino;
35. Rubinstein M., Reiner E., 1991, *Breaking Down the Barriers*, Risk, n.4;
36. Tommasetti A., 1996, *Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni sociali*, Ed. Veschi, Vol.I;
37. Varian H.R, 1998, *Microeconomia*, Ed. Cafoscarina;
38. Waring M.B., summer 2004, *Liability-Relative Investing,* The Journal of Portfolio Management;
39. Yawitz, Kaufold, Macirowski, Smirlock, estate 1987 , "*The Pricing and Duration of Floating Rate Bonds",* Journal of Portfolio Management.